趣味数学

ENTERTAINING MATHEMATICS

原著◎别莱利曼　改编◎宋　歌

江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House
全国百佳出版社

图书在版编目（CIP）数据

趣味数学 /（俄罗斯）别莱利曼著；宋歌改编．— 南昌：江西人民出版社，2016.3

（海量阅读·大眼睛球球科普·经典巨著系列）

ISBN 978-7-210-08258-3

Ⅰ．①趣… Ⅱ．①别… ②宋… Ⅲ．①数学－青少年读物 Ⅳ．① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 043972 号

《趣味数学》

（海量阅读·大眼睛球球科普·经典巨著系列）

作者：[俄] 别莱利曼　　改编：宋　歌

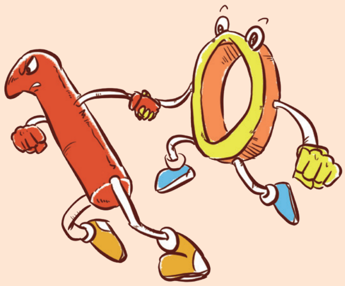
丛书策划：游道勤　张志刚

责任编辑 / 组稿编辑：张志刚

装帧设计：游　珑　　　插画：余明涛

图片提供：中国图库 tukuchina.cn

编委：宋　歌　姜小妹　刘行光　侯鹏飞　易春勇　罗湘宏



江西人民出版社出版发行

地　址：江西省南昌市三经路 47 号附 1 号（邮编：330006）

编辑部电话：0791-86898873

发行部电话：0791-86898815

网　址：www.jxpph.com

E-mail：zzg88@163.com　web@jxpph.com

2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷

开　本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16

印　张：8.5

字　数：120 千

ISBN 978-7-210-08258-3

定　价：20.00 元

承印厂：江西千叶彩印有限公司

赣版权登字 -01-2016-81

球球带你学科学

Entertaining mathematics

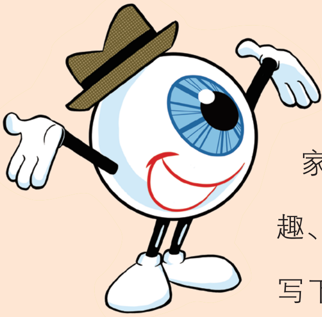
数学有趣吗?

我知道，有不少同学都觉得数学枯燥，一点也不觉得它有趣，只是为了考试、为了升学而不得已去学数学。

数学真的无趣、不好玩吗?不是的。

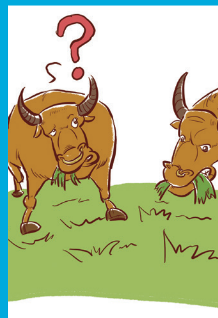
老子在他的《道德经》中有一句很有名的话，说“道生一，一生二，二生三，三生万物”。你看，万事万物都与数学有关系，数学是一切事物的参与者。而且，只要你留意，你会发现，数学还是很多有趣活动的策划者、很多游戏规则的制定者。比如说，七巧板、九连环、华容道……这些玩具都是遵循数学的规律设计出来的。还有，你跳个房子、跳个绳，是不是也要在地上画几何图形、要数数呢?

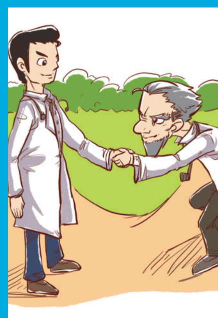
现在，你开始有点相信数学是有趣的了吧!别急，还没完呢，数学的有趣之处，不仅限于游戏，还因为它极具实用性，我们的生活处处离不开数学。

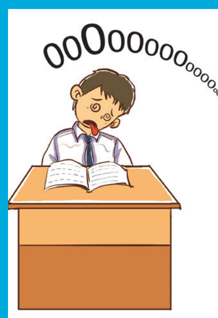


苏联科学家和科普作家别莱利曼为了把数学的有趣、数学的实用展示给同学们看，写下了《趣味几何学》《趣味代数学》这两本从好玩的角度解读数学的科普作品。在这两部作品里，你可以学习到怎么运用代数学让你在与小伙伴的游戏中成为通晓“读心术”的“大师”，还可以知道巨大的太阳对半分裂成肉眼看不到的草履虫只要少得可怜的次数；几何知识不但能在野外生存中解决实际问题，还能为你揭开神秘的电影魔术幕后的制作过程……许多神秘有趣的谜题在数学的支持下都将迎刃而解。

现在你面前这本不厚的《趣味数学》，就是别莱利曼两本数学科普著作的精华改编版。除了对原著的精挑细选，我们还绘制了不少有意思的彩图对原著内容予以丰富。我们还设计了两个培养数学情怀的栏目——“数学有意思”和“奇趣数字”，相信有这两个栏目的加入，你会对数学刮目相看。我们的初衷就是希望同学们在快乐阅读的同时，真正爱上数学，感受到数学之美、数学之趣。







目录

数字大瘦身（代数）

数字也有替身（代数）

奇妙的数字与数列（代数）

有趣的无穷多（代数）

到树林里测一测（几何）

到河边量一量（几何）

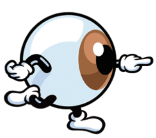
视觉上的奥妙（几何）

代　数

数字大瘦身

Entertaining mathematics

如果球球问你，1的10倍是多少，你很快就能说出答案：10。那么，1的100倍，1000倍，10000倍，100000倍，一直到100000……倍，1后面带着能让你说得口干舌燥的那么多0，也许会写上满满一大张纸的0，也许几张纸都不够写。这个时候，你会不会有种欲哭无泪的感觉？也许你会突然想起那则古代笑话：一个自以为“一”就是一横，“二”就是两横，“三”就是三横的孩子，趴在地上为父亲给一位姓“万”的朋友写请柬，地上到处是写了无数笔“一”的纸，他愁得一边写一边叹气，很好笑吧？你当然不想像他一样，所以，快来跟球球学习一种代数运算，它的名字叫“乘方”，只要学会运用它，数字后面有多少个0，都能立马大瘦身！



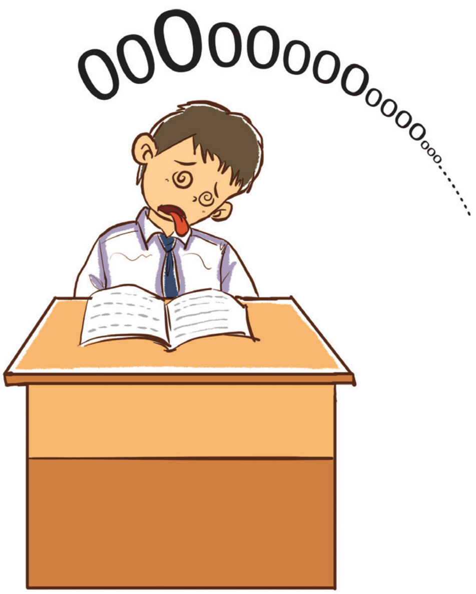
它排第五它骄傲

代数最基本的运算是什么？只要你读过小学二年级，立马就能说出答案：“加减乘除！”那么你知道代数一共有几种运算吗？答案

是：七种。第五种就是它：乘方。为什么它很骄傲呢？因为第六种运算“开方”和第七种运算“对数”，不过是它的两种逆运算而已，你们看看，排在它前面的那四个兄弟姐妹，哪有这个待遇和本事，所以它排第五它骄傲！

其实，它骄傲的原因还有一个，因为它是用来做大用途的，平时日常生活中用到的简单运算，根本无须它出马！你知道它都在什么时候大显身手吗？嘿嘿，现在我就来简单说一说。

天文学家在研究宇宙的时候，经常会遇到一些非常巨大的数字，这些数字一般只有一两位有效数字，后面跟着长长的一串 0，有的简直一眼望不到边，写起来非常不方便，人们将此称为“天文数字”。



数字后面0太多，形成天文数字。

比如地球到仙女座星云的距离是 95,000,000,000,000,000,000 千米，这个数字看起来够麻烦吧？为了不写错，得反复核实 0 的个数，而且在天文计算中，千米是过大的单位，研究者们一般用厘米来作单位，于是，这串数字的后面还要再加上五个 0，变成 9,500,000,000,000,000,000,000,000 厘米，你能读出这个庞大的数字吗？可是，跟恒星的质量比起来，这串数字就是小巫见大巫了。

在天文计算中，恒星质量以克为单位，如果用数字表示太阳质量的话，就是 1,983,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 克。很明显，如果用这么长一串数字来计算，不仅非常复杂，还很容易出错，何况这两串数字在天文计算中，还算是比较小的数字呢！

这时候，就轮到我——乘方来显身手啦，看我怎么给它们大瘦身！瘦身的秘诀就是：凡是 1 后面带着好多 0 的数字，都可以用 10 的若干次方来表示，比如 $100=10^2$，$1000=10^3$，$10000=10^4$，等等。

根据此秘诀，上面提到的那两个

数学有意思

数学文艺双生花（一）

近数十年来，国际上出现了一种应用数学方法研究艺术的思潮。数学与艺术究竟有什么联系？数学又如何用之于艺术？下面我们就数学与音乐、绘画、文学的关系略予叙述。

○ 数学与音乐

“多情”的音乐与“冷酷”的数学有关系吗？我们的回答是肯定的。甚至可以说音乐与数学是相互渗透、互相促进的，请看下面的事实：

我国的七弦琴（即古琴）取弦长 7/8，5/6，4/5，3/4，2/3，3/5，1/2，2/5，1/3，1/4，1/5，1/6，1/8 得所谓的 13 个徵（zhǐ）位，含纯率的 1 度至 22 度，非常自然，是很理想的弦乐器。我国著名古琴家查阜西早就指出，要学好古琴，必须有一定的数学学养。

世界著名波兰作曲家和钢琴家肖邦很注意乐谱的数学规划、形式和结构，有位研究肖邦的专家称肖邦的乐谱具有“乐谱语言的数学特征”。

1970 年我国著名琵琶演奏家刘德海决心运用“优选法”，寻找在琵琶每根弦上能发出最佳音色的点，不久，华罗庚教授用数学方法帮助他解决了这一难题，在弦长的 1/12 处，弹出的声音格外优美动听。1980 年 5 月，在全国琵琶演奏会上，几十位演奏家听了“最佳点”的演奏后，都认为数学与音乐之间的确有一种深奥的内在联系。

曾任武汉音乐学院院长的童忠良有一篇引人注目的论文，题为“论义勇军进行曲的数列结构”，该文引起的轰动不仅在于聂耳的杰作及论文本身的新颖，更在于引起音乐工作者的思考：要改变自身的知识结构，需要充实一些科学知识，包括数学知识。

数学的抽象美，音乐的艺术美，在岁月的历练中相互渗透。音乐美更深的奥秘至今还缺乏更合适的数学工具来对它进行探究，这有待于音乐家和数学家今后的合作和努力。

庞大数字，就可以瘦身成下面的样子：地球到仙女座星云的距离是 95×10^{23} 厘米，太阳的质量是 1983×10^{30} 克。怎么样，我的瘦身秘诀很管用吧？不但节省地方，计算起来也很方便。如果我们想把这两个数相乘，只需要计算 $95\times1983=188385$，然后再把上面的小数字 23 和 30 相加 $23+30=53$，写成 10^{53} 就可以了，整个计算过程如下：$(95\times10^{23})\times(1983\times10^{30})=188385\times10^{53}$。

这样的计算肯定比直接拿一个有 23 个 0 的数字，乘上一个有 30 个 0 的数字要简单方便得多，而且这种方法非常可靠，避免当 0 的数目很多时，不得不反复核查，或许最后还会有漏查的情况。

为了让你们相信用乘方大瘦身计算的便捷和必要性，接下去，我们来做一些有趣的计算题。

地球质量是空气质量的多少倍

拿出直尺，在纸上画一个边长为 1 厘米的正方形，那么这个正方形的面积是多少呢？你肯定能立刻说出答案：$1\times1=1$（平方厘米）。现在，你想象这个正方形像手电筒一样发出光芒，直射到夜空，形成一束正方体的“光柱”。

好了，可以收回想象了，我来说计算的题目。

【题目】已知地球质量是 6×10^{21} 吨，地球表面积是 51000 万平方千米，空气在地球表面形成的压力每平方厘米约 1 千克，计算一下地球质量是空气质量的多少倍？

我们先将题目换个说法，也就是说地球表面每平方厘米那么大点的地方，“扛着”重约 1 千克的大气柱，我们不妨把地球周围的大气层，看成一个个紧挨着的、底面积是 1 平方厘米的大气柱，这回明白为什么我刚才先让你想象一下“光柱”了吧？

明白了题目的意思，就可以开始计算了。

我们需要先把地球表面积的单位

变换成平方厘米：51000 万平方千米 = 510000000 平方千米 = 510000000000000 平方米 = 5100000000000000000 平方厘米。

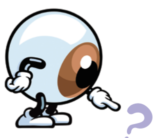
如此超长的一串数字，写起来令人发晕，为了防止错误，需要反复数好几遍，所以还是使用乘方大瘦身的计算方法来得方便：51000 万平方千米 $= 51 \times 10^{17}$ 平方厘米。

再求大气层的质量：$1 \times 51 \times 10^{17} = 51 \times 10^{17}$ 千克

将地球质量单位换算成千克：6×10^{21} 吨 $= 6 \times 10^{24}$ 千克

最后用除法计算出结果：$6 \times 10^{24} \div (51 \times 10^{17}) \approx 10^{6}$

由此我们得出答案，地球质量大约是空气质量的 100 万倍。



你的书桌在燃烧吗

如果我告诉你，你的木制书桌和椅子每分每秒都在燃烧，你相信吗？会不会突然有一种烫屁股的感觉？哈哈，虽然我说的话是真的，但是你也不用担心！让我们一起计算一道题，你就明白为什么不用担心啦。

我们的日常生活中，离不开各种各样的化学反应，可以说衣食住行无处不在，而且无论在什么温度，什么条件下，化学反应都在发生。人们根据经验，得到这样一条定律：化学反应的速度与温度有密切的关系。温度每降低 10℃，能够参与化学反应的分子数量便减少到原来的一半，化学反应的速度也就随之降低到原来的一半。

由此我们不难知道，木头中的碳

教室里的书桌每时每刻都在燃烧？

元素与空气中的氧元素无时无刻不在发生化学反应，只是在常温下的反应速度非常缓慢，我们根本无法发现。那么，这个反应到底有多缓慢呢？现在，开始我们的计算吧！

【题目】假设在 600℃的温度下，燃烧 1 克木材所用的时间为 1 秒，那么当温度降到 20℃时，燃烧 1 克木材需要多少时间？

温度从 600℃降低到 20℃，$600-20=580$（℃）。

运用上面所说的化学反应定律，我们知道温度每降低 10℃，反应速度就变为原来的一半，也就是$\frac{1}{2}$。降低 1 个 10℃，反应速度变为原来的$\frac{1}{2}$，再降低 1 个 10℃，反应速度变为$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{2}$，就是$\frac{1}{2^2}$，以此类推，温度从 600℃降低到 20℃，反应速度降低到$\frac{1}{2^{58}}$，反应时间也随之延长到原来的 2^{58} 倍。也就是说，在 20℃，燃烧 1 克木材所用的时间是 2^{58} 秒。

下面我们来利用乘方估算一下这个时间大约有多长。

因为 $2^{10}=1024\approx 10^3$，

所以 $2^{58}=2^{60-2}=2^{60}\div 2^2=2^{60}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}\times(2^{10})^6\approx\frac{1}{4}\times(10^3)^6$

$=\frac{1}{4}\times 10^{18}$（秒）。

再根据一年约有 3×10^7 秒，

所以（$\frac{1}{4}\times 10^{18}$）÷（$3\times 10^7$）

$=\frac{1}{12}\times 10^{11}\approx 10^{10}$（年）。

知道 10^{10} 年是多久吗？一百亿年！也就是说，在 20℃的温度下，燃烧 1 克木材需要的时间是一百亿年，难怪我们根本感觉不到，需要的时间实在是太长啦！

有限循环的阴晴天

我们知道圆周率 π 是个无限不循环小数，计算的时候，通常缩写为 3.14，但在这个 4 的后面，是一长串永无尽头且没有规律的数字。

古往今来，总有一些数学天才和记忆天才，不断更新着背诵圆周率的世界纪录，有一位乌克兰医生，曾经背诵到小数点后的 3000 万位，多么令人震惊！

背诵一长串无止境无规律的数字确实不容易，我们不妨来做一道关于有限的练习题，而且是一道很简单的乘方题。一开始你可能会觉得不以为然，但结果肯定会令你很吃惊！

【题目】如果忽略其他变化，只把天气分为阴天和晴天两种情况，然后记录每周的天气变化，你认为最多需要多长时间，才能保证一周的天气出现完全重复的情况？

乍一看题，我们会觉得很快就能出现重复天气，最多也就七八周呗！但是，数学需要用数据来证明，计算结果才是事实！

由于每一天的天气都有两种可能：阴天，晴天。那么，星期一有两种可能，星期二有两种可能，这两天的天气情况就会有 $2\times2=2^2=4$ 种组合方式。接着，星期三的两种可能，与前两天组合，就有了 $2^2\times2=2^3$ 种组合方式，然后是星期四、星期五、星期六，一直到星期日，情况都与前三天类似，我们可以推算出一周有 $2^7=128$ 种不同阴晴的组合方式。

也就是说，如果按照一个月有四个星期来计算，大约至少需要 $128\div4=32$ 个月，两年半的时间，才能保证每周天气出现重复情况。当然，这个结果只是最大期限，在这个期限内，虽然概率很小，但还是存在不重复的可能性，但过了这个期限以后，重复天气就成了不能避免的事情了。

怎样排列结果最大

如果只用三个 2 组成一个数，怎样排列得到的结果最大？答案肯定不是 222，既然我们学过乘方，肯定要在这方面动动脑筋，于是我们有了 2^{22} 和 22^2。可能你了解过第三级“超乘方”，会得意扬扬地大声说：“答案是 2^{2^2}，肯定不会错！”

那么，正确答案是什么呢？好在

数目不大，我们来用最基础的方法算一算好了。

$2^{22} = 4194304$　　$22^2 = 484$

$2^{2^2} = 2^4 = 16$

根据计算结果，我们可以看出，按照 2^{22} 排列是所能得到的最大数字。

接着，我们再来排三个 3，看看在不用任何运算符号的情况下，怎么

数学有意思

数学文艺双生花（二）

○ 数学与绘画

在数学与绘画之间，似乎没有明显的相似之处，但数与形的概念可以上溯到远古的石器时代。数（shù）起源于数（shǔ），先民们把现实对象（野牛、野猪、羊、鹿……）的轮廓线画在墙壁上，并用符号记录牲畜的头数和发生的各类事情，这些原始绘画和记号已具有几何对称的特征和一定的数的意义。

怎样在平面画布上画好立体的图象，自古以来都有画家在研究。1435 年阿尔伯蒂写作《绘画论》一书就是论述绘画的数学基础——几何透视学。作者得出“远小近大，远淡近浓，远低近高，远慢近快”的几何透视学结论。意大利文艺复兴时期的著名画家达·芬奇利用数学原理，通过对透视理论的研究，使素描艺术得到前所未有的发展，成为闻名于世的一代艺术宗师。他说：“任何学科，如果没有经过数学的证明，就不能认为是真正的科学。”

从抽象派艺术大师毕加索的不少作品中，可以看到几何图形描绘对象的手法，把形体变成由重叠的或透明的几何面块所组成的抽象图象。

数学家们很早就发现，传世的绘画、雕塑、建筑作品，都是遵循着黄金分割、华罗庚的 0.618（优选法）、菲波那契数列等数学方法来建构的。最美的人体，也是严格按照黄金分割律构造自己的比例的。可以说，优美的艺术，都离不开数学方法的支撑。

排列得到的结果最大？我们得到如下排列：

3^{33}　　33^3　　$3^{3^3}=3^{27}$

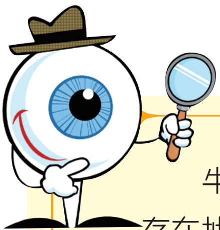
显然，3^{33} 要比 3^{27} 和 33^3 大得多。

那么，用三个 4 组成一个数，怎样才能得到排列结果最大的那个数呢？如果我们根据三个 2 和三个 3 的排列结果来推理，得到的答案将是 4^{44}。很显然这个答案是不对的，因为 4 的第三级超乘方 $4^{4^4}=4^{256}$，要比 4^{44} 大得多，是所有排列中最大的一个，也就是所得的正确答案。

接下去，我们索性再排三个 5，结果是 5^{5^5} 大于其他排列。所以呢，我告诉你一个规律，当数字大于 3 的时候，三个相同数字的排列，用第三级超乘方排列的结果是最大的。

代　数
数字也有替身

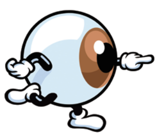
Entertaining mathematics



牛顿在著作《普遍的算术》中说过："面对一个数量间存在抽象关系的问题，若想解答它，只需要把问题从普通语言转换成代数语言。"

这句话说得有些晦涩难懂，我用大白话解释一下。比如当你做一道数学题，遇到已知条件有点少的时候，你会忍不住会想："如果知道这个数值多好，如果那个数值是已知的多好！"这时候，就可以把问题从普通语言转换成代数语言，用未知数来列方程，也就是使用数字的"替身"，将未知条件变成已知条件，列出方程，迅速得到题目的答案。

这一章，我们即将体验方程的魅力，看看它如何大展身手，将复杂的问题变成小菜一碟！



使用"替身"的诀窍

我们先来看看两道题目，就知道使用"替身"有多么方便啦。

【题目一】有位富有的商人赚了一

题目一条件转化成的解题思路表格

普通语言	代数语言
有位富有的商人赚了一笔钱	x
第一年，他花掉 100 个金币	$x-100$
后来又补上剩余钱数的三分之一	$(x-100)+\dfrac{x-100}{3}=\dfrac{4x-400}{3}$
第二年，他又花掉 100 个金币	$\dfrac{4x-400}{3}-100=\dfrac{4x-700}{3}$
又补上剩余钱数的三分之一	$\dfrac{4x-700}{3}+\dfrac{4x-700}{9}=\dfrac{16x-2800}{9}$
第三年，他再次花掉 100 个金币	$\dfrac{16x-2800}{9}-100=\dfrac{16x-3700}{9}$
之后补上余额的三分之一	$\dfrac{16x-3700}{9}+\dfrac{16x-3700}{27}=\dfrac{64x-14800}{27}$
最后，这笔钱的数目变成最初的两倍	$\dfrac{64x-14800}{27}=2x$
商人原来那笔钱有多少	通过求解上面的方程，得到答案是 1480 个金币

笔钱。第一年，他花掉 100 个金币，后来又补上剩余钱数的三分之一。第二年，他又花掉 100 个金币，又补上剩余钱数的三分之一。第三年，他再次花掉 100 个金币，之后补上余额的三分之一，最后，这笔钱的数目变成最初的两倍，商人原来那笔钱有多少？

【题目二】由于史料的缺失，没有人知道古希腊数学家刁藩都活了多少岁，人们只能通过他墓碑上的碑文来推断："过路人！这里埋的是喜欢数学的刁藩都，这些文字可以告诉你他的寿命有多长。幸福的童年占据了他人

数学家的墓碑留给后人的谜题。

题目二条件转化成的解题思路表格

普通语言	代数语言
过路人！这里埋的是喜欢数学的刁藩都，这些文字可以告诉你他的寿命有多长	x
幸福的童年占据了他人生的六分之一	$\frac{x}{6}$
又过了人生的十二分之一后，他开始进入青年时代	$\frac{x}{12}$
结婚后，他幸福地度过了人生的七分之一，没有孩子	$\frac{x}{7}$
又过了五年以后，第一个孩子出生，他感到非常幸福	5
并在幸福中度过了人生的二分之一，直到厄运降临，不幸失去了儿子	$\frac{x}{2}$
儿子的去世让他陷入悲痛之中，四年后撒手人寰	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$
请问，刁藩都活了多少岁	通过求解上面的方程，得到答案是84 岁。我们可以算出来刁藩都 21 岁结婚，38 岁得子，80 岁儿子去世

生的六分之一，又过了人生的十二分之一后，他开始进入青年时代。结婚后，他幸福地度过了人生的七分之一，没有孩子。又过了五年以后，第一个孩子出生，他感到非常幸福，并在幸福中度过了人生的二分之一，直到厄运降临，不幸失去了儿子。儿子的去世让他陷入悲痛之中，四年后撒手人寰。”请问，刁藩都活了多少岁？

怎么样？光读题就有种很晕的感觉吧？是不是心里已经开始发牢骚了？“这钱花了以后随便补上不行啊，还非得余额的三分之一？那墓碑直接写上生平得了，还非得我们费心费脑一个转折又一个转折地去计算，这不是折腾人嘛！”

哈哈，先别发牢骚，其实，这些九转十八弯的问题，正是数学的魅力所在！当然，数学题的每个文字都不是废话，都是为了让你读懂题意，或者混淆你的思路，前提是你的语文成绩不会太差，如果语文很差，没准读不懂数学题的意思呢！

这两道题，我们都可以将答案找个替身“x”，然后按照每句话的意思，依次列出方程。我将具体的解题思路用表格列出来，可以让你一目了然普通语言与代数语言之间的转换。

根据两个表格，我们可以观察到，给所求总量找个“替身”，会让复杂繁琐的问题变得很清晰，解决问题很方便。

两个替身的威力

【**题目**】马和骡子驮着重重的行李并排向前走。如果把马背上的包裹拿下来一个，放到骡子背上，那么马所驮东西的重量只有骡子所驮东西重量的一半。如果把骡子背上的包裹拿下来一个，放到马背上，那么它们俩所驮东西的重量相等。假设每个包裹的重量相等，问马和骡子各驮了多少个包裹？

要想把这道题变得简单，不妨试试两个“替身”的威力。我们假设马驮了 x 个包裹，骡子驮了 y 个包裹，

题目的条件转化成的解题思路表格

普通语言	代数语言
如果把马背上的包裹拿下来一个	$x-1$
放到骡子背上	$y+1$
那么马所驮东西的重量只有骡子所驮东西重量的一半	$y+1=2(x-1)$
如果把骡子背上的包裹拿下来一个	$y-1$
放到马背上	$x+1$
那么它们俩所驮东西的重量相等	$y-1=x+1$

问题一下就变得简单了。

根据表格分析，我们可以把这道题转化成一个含有两个“替身”的方程组：$\begin{cases} y+1=2(x-1), \\ y-1=x+1。\end{cases}$

解这个方程组，可得 $\begin{cases} x=5, \\ y=7。\end{cases}$ 也就是说，马驮了 5 个包裹，骡子驮了 7 个包裹。

多个替身一起上

【题目】四兄弟一共有 45 个金币，为了使每个人手里的钱一样多，需要把老大的钱增加 2 个金币，老二的钱减少 2 个金币，老三的钱增加到原来的 2 倍，老四的钱减少到原来的 $\frac{1}{2}$。问：四兄弟原来各有多少钱？

这道数学题，不妨运用多个“替身”来解答，假设老大有 x 个金币，老二有 y 个金币，老三有 z 个金币，老四有 t 个金币。

把最后一个连等的方程写成三个等式，组成一个方程组：

$$\begin{cases} x+2=y-2, \\ x+2=2z, \\ x+2=\frac{1}{2}t。\end{cases}$$

题目的条件转化成的解题思路表格

普通语言	代数语言
四兄弟一共有 45 个金币	$x+y+z+t=45$
把老大的钱增加 2 个金币	$x+2$
老二的钱减少 2 个金币	$y-2$
老三的钱增加到原来的 2 倍	$2z$
老四的钱减少到原来的 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}t$
每个人手里的钱一样多	$x+2=y-2=2z=\frac{1}{2}t$

根据上面的等式方程组，可以用 x 来表示 y、z、t：

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ z = \dfrac{x+2}{2}, \\ t = 2x + 4。\end{cases}$$

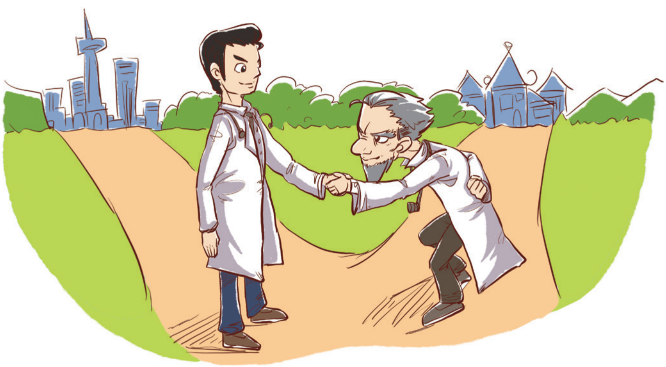
将 y、z、t 的表达式代入表格中的第一个方程式，得到方程：

$$x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45$$

解方程，得结果为 $x = 8$，再将 x 的值分别代入 y、z、t 的表达式，求出 y、z、t 的值分别为 12、5、20。因此，一开始的时候，老大有 8 个金币，老二有 12 个金币，老三有 5 个金币，老四有 20 个金币。

惜才的老医生

【题目】一位非常惜才的老医生，邀请新来的、家住外地的年轻医生到家里做客。因为是周末，年轻医生决定步行前往，他下午 2:45 从宿舍出发，以每小时 4 千米的速度前往老医生家。老医生下午 3:00 出门，以每小时 3 千米的速度沿着年轻医生来的方向迎接他。两个人相遇后，老医生转过头，带着年轻医生一起回到家里。晚上，年轻医生回到宿舍后，计算了自己所走的路程，正好是老医生所走路程的 4 倍。问：老医生家距离年轻医生的宿舍有多远？



计算路程或时间是应用题常见的形式。

根据题意，我们假设老医生家距离年轻医生的宿舍有 x 千米远，那么，年轻医生一共走了 $2x$ 千米的路程，老医生走了 $2x \div 4 = \dfrac{x}{2}$ 千米。在与年轻医生相遇

时，老医生走了他所走路程的一半，也就是$\frac{x}{4}$，年轻医生则走了$\frac{3x}{4}$。

因为老医生每小时走 3 千米，年轻医生每小时走 4 千米，所以相遇时老医生走了$\frac{x}{12}$小时，年轻医生走了$\frac{3x}{16}$小时。

年轻医生下午 2∶45 从宿舍出发，老医生下午 3∶00 才出门，比年轻医生少走了 15 分钟，也就是$\frac{1}{4}$小时，由此我们可以列出方程如下：

$$\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{4}$$

解方程可得 $x=2.4$

也就是说，老医生家距离年轻医生的宿舍有 2.4 千米远。

数学有意思

数学文艺双生花（三）

○ 数学与文学

数学与文学看似风马牛不相及，实则数学与文学有着奇妙的同一性，先看两位著名文学家关于文学与数学的远见卓识。

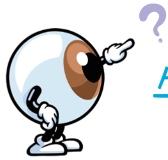
雨果说："数学到了最后阶段就遇到想象，在圆锥曲线、对数、概率、微积分中，想象成了计算的系数，于是数学也成了诗。"

福楼拜说："越往前走，艺术越要科学化，同时，科学也要艺术化，两者从山麓分手，又在山顶会合。"

数学与诗有着不解之缘，著名作家秦牧在其名著《艺海拾贝》中辟有"诗与数学"一节，认为数字入诗，显得"情趣横溢，诗意盎然"。

我国古代律诗的平仄变化错综复杂，难以掌握，但如果以数学观点去认识，却是一种具有简单运算规则的数学模式，其中蕴涵着一种数学美。任何一种平仄格式都可化为一个数学矩阵。

律诗和绝句的平仄矩阵共有 16 个，可归纳成一个律诗平仄的数学公式，这为学习和掌握律诗和绝句的各种平仄规律提供了一个可行的方法。



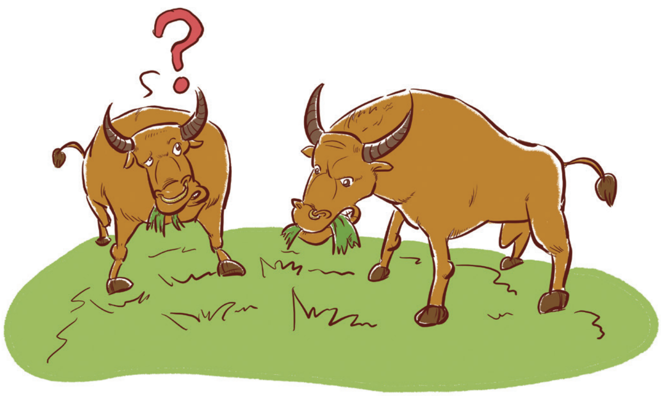
牛吃草问题

你知道牛顿是谁吧？对，就是传说中被落下来的苹果砸中脑袋，然后脑洞大开发现万有引力的那位著名的科学家。他的科学成就非常多，几乎在每个涉足的科学领域都做有一些重要贡献。

牛顿在叙述理论的时候，喜欢根据一些实例来说明，他认为在学习科学的过程中，做题要比死记硬背那些规则和公式更有用。在他列举的众多实例中，有一个牛吃草问题非常经典，下面这道题便是在牛顿问题的基础上演化而来，出自俄国契科夫的小说《家庭教师》中的一个搞笑情节，家庭教师给他的学生出了下面一道题。

【题目】整个牧场上的草长得一样密，生长速度也一样快。已知要吃完牧场上的草，70 头牛需要用 24 天，30 头牛需要用 60 天。假设每头牛每天吃的草一样多，那么在 96 天内把牧场上的草吃光，需要多少头牛？

在小说里，学生找来两个成年亲戚帮自己做这道题，做了很久也没有结果，他们感到非常困惑。其中一个亲戚原以为这是一道极其简单的题目，甚至完全不用思考，96 是 24 的四倍，答案当然是 70 的$\frac{1}{4}$，也就是$17\frac{1}{2}$头牛，显然答案是错的！如果根据另外一个已知条件，30 头牛需要用 60 天把草吃光，得到答案是$18\frac{3}{4}$头，显然还是错的！而且题目本身也有一些使人困惑的地方，既然 70 头牛吃完草需要用 24 天，那么 30 头牛只用 56 天就可以



牛吃草的问题如何列成方程解答？

吃完这些草了，为什么题目中却说需要 60 天呢？

这时另一个亲戚突然茅塞顿开说："是我们没有把草一直在生长这个条件考虑进去吧？"这句话非常正确，草在不停地生长，如果不把这个因素考虑进去，不仅这个题目做不出来，甚至会怀疑题目本身的正确性，觉得题中所给条件自相矛盾。那么，到底应该怎样解答这道题呢？

我们可以使用一个辅助的"替身"y，来表示牧场每天长出的草所占牧草总量的比重。也就是说，设一天长出的草为 y，则 24 天能长出 $24y$；假设牧场草总量是 1，那么在 24 天里，70 头牛吃掉的草为 $1+24y$，可以算出这群牛一天吃掉的草是 $\frac{1+24y}{24}$，则一头牛一天吃掉的草就是 $\frac{1+24y}{24\times70}$。

同样的道理，由于 30 头牛用 60 天可以把牧场上的草吃光，可以算出一头牛一天吃掉的草是 $\frac{1+60y}{60\times30}$。

根据每头牛每天吃掉的草一样多，可以列出下面的方程：

$$\frac{1+24y}{24\times70}=\frac{1+60y}{60\times30}$$

解这个方程，可以得出 $y=\frac{1}{480}$。

根据牧场每天长出的草所占牧草总量的比重为 $\frac{1}{480}$，很容易求出一头牛一天吃掉的草是 $\frac{1+24y}{24\times70}=\frac{1+24\times\frac{1}{480}}{24\times70}=\frac{1}{1600}$。

假设需要 x 头牛，才能在 96 天内吃光牧场的草，可以列出方程：

$$\frac{1+96\times\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$$

解这个方程，可以得出 $x=20$。

如果在 96 天内把牧场上的草吃光，需要 20 头牛。

有个成语叫"趁热打铁"，如果上面那道题你弄懂了，不妨再做一道有关牛吃草的题目，以加深对此类题型的印象。

【题目】有三个面积分别为 $3\frac{1}{3}$ 公顷、10 公顷、24 公顷的牧场，三个牧草上的草长得一样密，生长速度一样快。第一个牧场的草可以供 12 头牛吃 4 个星期，第二个牧场的草可以供 21 头牛吃 9 个星期。问：第三个牧场的草可以供多少头牛恰好吃 18 个星期？

我们用"替身"y 来表示一星期

1 公顷牧场上长出的草占原来草总量的比重，那么第一个牧场一星期所长出的草是 $3\frac{1}{3}y$，4 个星期长出的草是 $3\frac{1}{3}y\times4=\frac{40}{3}y$，相当于把原来第一个牧场的面积增加到 $3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y$ 公顷，12 头牛用 4 个星期吃完。也就是说，每个星期 12 头牛可以吃占总量 $\frac{1}{4}$ 的牧草，1 头牛吃掉占总量 $\frac{1}{48}$ 的牧草。据此，我们可以得出 1 头牛每个星期所吃的牧草为：

$$(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y)\div48=\frac{10+40y}{144}$$

同理，我们可以从已知条件推算第二个牧场上 1 头牛每个星期所吃的牧草：一星期 1 公顷草地长出的草为 y，9 个星期 10 公顷草地长出的草是 $90y$，因此 21 头牛在 9 个星期内吃掉的牧草总量为 $10+90y$，每头牛每个星期吃掉的牧草是：

$$\frac{10+90y}{9\times21}=\frac{10+90y}{189}$$

根据第一个牧场和第二个牧场得到的数据，我们列出下面的等式：

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}$$

通过解方程得出 $y=\frac{1}{12}$，由此可以求出能让 1 头牛吃一个星期的牧场面积：

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\times\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}(\text{公顷})$$

我们假设第三个牧场上牛的数量为 x，列出方程：

$$\frac{24+24\times18\times\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54}$$

解这个方程，求出 $x=36$。也就是说，在第三个牧场的草可以供 36 头牛恰好吃 18 个星期。

爱因斯坦巧答题

有一次，著名物理学家爱因斯坦生病了，好朋友莫西科夫斯基前来探望，为了给爱因斯坦解闷，莫西科夫斯基出了一道题让他做。

爱因斯坦听完题目，笑着说："这道题很有意思，既有趣又有一定难度，非常适合病人消磨时间。不过呢，它恐怕消磨不了我多少时间，我已经快得到答案了。"

说完，爱因斯坦从床上坐起来，拿出纸和笔，仅几笔就在纸上勾画出一个草图，来表现问题列出的条件，最后他解题所用的时间，甚至没超过莫西科夫斯基叙述题目用的时间。

那么，现在我们来看看这个题目，看看你解答这个问题需要多少时间。

【题目】当表针的位置在 12 点钟时，如果将较短的时针和较长的分针对调一下，它们还是指向 12 点，时间没有改变。但是在其他时间里，如果对调时针和分针，会得到与原来不同的时间，甚至是不合常理的结果。比如 6 点的时候，如果将时针和分针对调，时针指向 12，分针指向 6，这种情况就是不合常理。问：当表针处在什么位置时，即使两针对调，所得的新位置仍然显示可能存在的时间？

首先明确，这个题目问的是什么时间时针分针对调也是合理的时间。

首先，我们把表盘圆周分成相等的 60 份，然后以每份为单位，来计算表针从 12 开始所走的距离。假设时针从 12 起走了 x 个刻度，分针走了 y 个刻度后，到达了符合题目要求的位置。时针走过 60 个刻度需要 12 个小时，也就是每小时能走 5 个刻度，走 x 个刻度需要的时间是 $\frac{x}{5}$ 小时。我们还可以换个说法，相当于表走到 12 点之后，又走了 $\frac{x}{5}$ 小时。

因为每小时有 60 分钟，所以分针走过 y 个刻度所用的时间是 $\frac{y}{60}$ 小时。也就是说，分针是在 $\frac{y}{60}$ 小时之前经过数字 12 的。换言之，两根指针在 12

点重合后，又过了（$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$）小时。由于$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$表示的是 12 之后过去了几个整小时，所以这个数应该是从 0 到 11 之间的一个整数，假设为 m。

当两根指针的位置调换之后，我们用同样的方法求出从 12 点到调换后的时间，表针经历了（$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$）个小时。这个数也是一个从 0 到 11 之间的整数，假设为 n。

根据以上分析，我们列出方程组：

$$\begin{cases} \frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m \\ \frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n \end{cases}$$

由这个方程组可以解出：

$$\begin{cases} x=\frac{60(12m+n)}{143} \\ y=\frac{60(12n+m)}{143} \end{cases}$$

因为 m 和 n 都可以任意取从 0 到 11 之间的整数，所以若想确定全部所求表针的位置，只需要将从 0 到 11 之间的全部整数分别代入到方程中就可以了。由于 m 可以取 12 个整数，任意一个都可与 n 所取的 12 个数中的任意一个数组合，所以本该有 $12\times12=144$ 个解，但因为 m、n 都是 0 时，和 m、n 都是 11 时，表针所处的是同一个位置，也就是 12 点，所以这道题其实只有 143 个解。

下面，我们找两个例子来试试结果。

第一例：

当 $m=1$，$n=1$ 时，

$$x=\frac{60\times13}{143}=5\frac{5}{11}, \quad y=5\frac{5}{11}$$

对应的时间是 1 点 $5\frac{5}{11}$ 分，此时时针和分针是重合在一起的；时针和分针重合在一起的时候，当然可以彼此对调。

第二例：

当 $m=8$，$n=5$ 时，

$$x=\frac{60(5+12\times8)}{143}\approx42.38$$

$$y=\frac{60(8+12\times5)}{143}\approx28.53$$

这时所指的时间应该是 8 点 28.53 分和 5 点 42.38 分。

当我们把表盘的圆周平均分成 143 份时，平分点就是这道题的答案，也就是当表针指向这些点时，对调时针和分针后得到的时间仍然存在，而当表针指向这 143 个点之外的那些点时，对调时针和分针后得到的时间是不合理的。

不知道你用了多长时间解出这道

数学有意思

别具韵味的数字诗（一）

数字入诗，别具韵味，闪烁着迷人的光芒，给人以美的享受和隽永的印象。

○ 连用10个“一”的诗

清代女诗人何佩玉擅长作数字诗，她曾写过一首诗，勾画了一幅“深秋僧人晚归图”，连用十个“一”却不给人重复的感觉：

一花一柳一点矶，一抹斜阳一鸟飞。
一山一水一中寺，一林黄叶一僧归。

而清代陈沉的一首“十一”诗，更勾画了一幅意境幽远的渔翁垂钓图：

一帆一桨一渔舟，一个渔翁一钓钩。
一俯一仰一顿笑，一江明月一江秋。

题，反正我想了好一会儿才找到解题的思路。不过，如果能解出这道题，其余关于此类的题很容易就能做出来，不信你试试下面的题目。

【题目】请问正常走动的钟表，有几次机会时针和分针的位置重合?

刚才我们已经做了一道烧脑题，所以很快就能想到，当时针和分针重合的时候，对调时针和分针的位置，所指示的时间没有变化，它们从 12 开始，走过同样个数的刻度。也就是说，x 和 y 的值是相等的。

根据上面那道题的解法，我们可以建立一个方程组：

$$\begin{cases} x = y \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{60} = m \end{cases}$$

在这个方程组中，m 可以任取从 0 到 11 之间的整数。由这个方程组得出：

$$x = \frac{60m}{11}$$

m 有从 0 到 11 一共 12 个可能的取值，但 $m = 0$ 和 $m = 11$ 时，指针都指在 12 点的位置，所以表针重合的位置只有 11 个。

猜数游戏的秘诀

如今是数码时代，人们沉浸在各种手机应用中，连朋友聚会的时候都少了很多交流，很多人只顾低着头看自己的手机。所以呢，聚会时你不妨提议大家将手机都收起来，玩玩古老的猜数游戏。

作为游戏的主持者，你先随意选出一位朋友，让他想好一个数字，然后将这个数加上 2，乘以 3，减去 5，再减去这个数，再乘以 2，减去 1……这样经过多步骤的计算以后，当他将最后结果告诉你时，你立刻就能说出他最初想好的数是什么。当然，前提是你和朋友的数学口算都没有问题，如果连口算都成问题，还真没法玩这个游戏。

有空时扔掉手机，玩玩古老的猜数游戏。

这个游戏表面上看来很神奇，仿佛懂得读心术一般，其实都是“替身”大侠加上口算能力的功劳，过程如下面的表：

猜数游戏的解题程序表格一

想好一个数字	x
将这个数加上 2	$x+2$
乘以 3	$3x+6$
减去 5	$3x+1$
再减去这个数	$2x+1$
再乘以 2	$4x+2$
减去 1	$4x+1$

看到上面这个表格，对于将普通语言转换成代数语言的理解又加深了吧？表格右栏一目了然地列出了计算的所有过程，无论朋友想的 x 是什么数字，经过上面一系列运算之后，得到的结果都是 $4x+1$。比如，当朋友告诉你最后的结果是 33，你的脑海里立刻会列出方程式 $4x+1=33$。这样一个简单的方程式，你当然能立即算出答案 $x=8$ 了。可见，这其实是一件非常简单的事情，你完全可以在出题之前就想好怎么计算结果。

为了让朋友们觉得更加神奇，接下来，你可以把游戏升级，让他们决定将所想数字进行什么样的运算程序。为了把你弄糊涂，朋友们一定会说出许多步的运算，这时候你的大脑要飞快地运转，展现出你非凡的口算能力。

例如，你的朋友想好一个数字后，会一边默默计算，一边告诉你，他要将这个数乘以 2，加上 3 ，再加上这个数，然后加上 1，乘以 2，再减去这个数，然后减去 3，减去这个数，减去 2，再用所得结果乘以 2，加上 3。最后，他以为自己成功将你弄糊涂了，得意扬扬地告诉你，结果是 49。他没料到，你立即说出他所想的数是 5，速度之快令大家目瞪口呆。

下面，我们还是用列表格的方法，看看“替身”大侠 x 是怎么大展身手的。

猜数游戏的解题程序表格二

想好一个数字	x
将这个数乘以 2	$2x$
加上 3	$2x+3$
再加上这个数	$3x+3$
然后加上 1	$3x+4$
乘以 2	$6x+8$
再减去这个数	$5x+8$
然后减去 3	$5x+5$
减去这个数	$4x+5$
减去 2	$4x+3$
再用所得结果乘以 2	$8x+6$
加上 3	$8x+9$

很明显，经过一系列代数语言，最后你只要计算 $8x+9=49$ 就可以了，非常简单，只要稍作练习，你就是百战百胜的“读心大师”！

不过，玩这个游戏不是怎么运算都可以的，如果出现“替身”大侠消失的情况，我们就很难再把游戏继续下去。比如在做了一连串运算之后，你得到一个关于 x 的表达式 $x+14$，而你的朋友却告诉你下一步的运算是减去他一开始所想的数字，这样你得到的只是一个数字 14，根本没法算出他想的数字究竟是什么。遇到这种情况，你应该立即打断朋友，然后告诉他，他目前得到的结果是 14，这样也足以让大家震惊一下，有趣吧？

“荒唐”的假设

有一种题目，用不符合我们常用的十进制运算方法来出题，使我们已经习惯十进制思维的大脑变得有些糊涂，就是看似“荒唐”假设的自定义运算题目。这一小节，我们来感受一下“替身”大侠是如何解决这类题目的。

【题目】如果 $8\times8=54$，那么 84 应该等于什么？

从我们开始学乘法口诀时，就将 $8\times8=64$ 背得滚瓜烂熟，现在猛然出来个 $8\times8=54$，免不了有种思路受限的感觉，觉得太荒唐了，明明是没有意义的计算嘛！当然，如果按照十进制的计算方法，这道题是错的，但数学的应用可不是只有十进制。

下面，我们请出“替身”大侠来显身手！假设题目中的数字是 x 进制，那么根据题意可以列出方程：

$$84=8x+4$$

同理 54 的表达式是：$54=5x+4$。

因此 $8\times8=54$ 可以转换成 $8\times8=5x+4$，也就是 $64=5x+4$，解这个方程得到 $x=12$，说明这道题目中的数字是按照十二进制写的，所以 $84=8\times12+4=100$。也就是说，如果 $8\times8=54$，那么 84 应该等于 100。

用同样的方法还可以解出一些类

数学有意思

别具韵味的数字诗（二）

○ 连用一至十这10个数词的诗

宋朝理学家邵雍有一首《蒙学诗》巧妙地运用了一至十这十个数词，为我们描绘了一幅自然的乡村风景画：

一去二三里，烟村四五家。
楼台六七座，八九十枝花。

新中国成立前，法币天天贬值，物价一日数涨，重庆一家晚报登过一首描绘小学教师饥寒交迫生活的诗：

一身平价布，两袖粉笔灰。
三餐吃不饱，四季常皱眉。
五更就起床，六堂要你吹。
九天不发饷（xiǎng），十家皆断炊。

下面分别是一至十起头的唐诗名家集句，颇有韵味：

一片冰心在玉壶（王昌龄），两朝开济老臣心（杜　甫）。
三军大呼阴山动（岑　参），四座无言星欲稀（李　顺）。
五湖烟水独忘机（温庭筠），六年西顾空吟哦（韩　愈）。
七月七日长生殿（白居易），八骏日行八万里（李商隐）。
九重谁省谏书函（李商隐），十鼓只载数骆驼（韩　愈）。

当代台湾学者张水明先生是福建武平人，自幼聪敏，七岁能诗，被称为“武平才子”，曾写过一首含有一至十和百、千、万13个数词的诗：

百尺楼前丈八溪，四声羌笛六桥西。
传书望断三春雁，倚枕愁闻五夜鸡。
七夕一逢牛女会，十年空说案眉齐。
万千心事肠回九，二月黄鹂向客啼。

似的题目，如：当 $5\times6=33$ 时，100等于什么？通过上面的方法解这道题，我们可以发现题中的数字是九进制，从而得出答案是81。

交换舞伴

对于一道繁琐复杂的题目，选择合适的“替身”极其重要，对解出题目起着事半功倍的作用。

【题目】在一次晚宴上，共有20个人跳过舞：玛丽亚和7个男伴跳过舞，奥尔嘉和8个男伴跳过舞，薇拉和9个男伴跳过舞……以此类推，一直到尼娜，她和所有的男伴都跳过舞，请问，在晚宴上跳舞的男士有多少个?

这道题如果用“替身”x来表示跳舞男士的人数，就会有种无从下手的感觉，所以我们用x来表示跳舞女士的人数。

假设晚宴上跳舞的女士人数为x，由题意可知：

玛丽亚作为第一个女士，一共与（6+1）个男士跳过舞；

奥尔嘉作为第二个女士，一共与（6+2）个男士跳过舞；

薇拉作为第三个女士，一共与（6+3）个男士跳过舞；

……

依此类推，最后一个女士尼娜，也就是第x个女士，一共与（$6+x$）个男士跳过舞。

因为尼娜与所有男士都跳过舞，所以我们可以据此列出如下方程：

$$x+(6+x)=20$$

舞会中会交换舞伴，那么问题来了……

解这个方程可得：

$x=7$

即在晚宴上跳舞的女士有 7 个，跳舞的男士则有 $20-7=13$ 个。

令人迷惑的“替身”

在我们使用“替身”大侠解题的时候，有时会遇到一些比较棘手的方程，如果没有太多的解题经验，也许会令人非常迷惑。下面是我挑选出来的几个例子，说不定哪天你也会遇到这些情况呢！

【题目】求这样的两位数：十位上的数字等于个位上的数字减去 4，将十位和个位上的数字对调，然后用所得的新数减去原来的两位数，所得的结果是 27。

我们设十位上的数字是 x，个位上的数字是 y，然后根据题目所给条件，列出方程组：

$$\begin{cases} x=y-4 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ (10y+x)-(10x+y)=27 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

将第①个方程中 x 的表达式代入第②个方程，可得

$$10y+(y-4)-[10(y-4)+y]=27$$

化简之后，等式变为：

$$36=27$$

看到上面那个等式没，有些迷惑吧？不但它本身是一个不成立的等式，而且连未知数都没有了，这说明了什么问题呢？

其实，这表明符合题目要求的两位数是不存在的。我们认真观察所列的方程组，不难发现这两个方程本身是互相矛盾的。

化简第①个方程可以得出 $y-x=4$。

而化简第②个方程得出的却是 $y-x=3$。

同样的一个表达式 $y-x$，第一个方程的右边是 4，第二个方程的右边却是 3，很明显 4 不等于 3，所以这个方程肯定是没有解的。

解下面这个方程组也会遇到类似的问题：

$$\begin{cases} x^2y^2=8 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ xy=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

我们用第②个方程去除第①个方程，可以得出 $xy=2$，但是我们跟方程组中的方程一比较，发现 $xy=4$，“$4=2$”明显是不成立的，因此这个方程的解并不存在。我们把这种没有解的方程组叫做“互不相容方程组”或“矛盾方程组”。

如果我们把题目的条件改一下，十位上的数字等于个位上的数字减去3，其余条件不变，请求出这个两位数。

我们仍然设十位上的数字是 x，那么个位数字是 $x+3$，根据条件列出如下方程：

$$10(x+3)+x-[10x+(x+3)]=27$$

化简这个方程以后，我们得到这样一个等式：

$$27=27$$

这个等式当然是无比正确的，但它对于我们求 x 的值没有任何意义，难道说这道题无解？其实不然，这恰恰说明我们所列的方程是一个恒等式，不管“替身” x 取什么值，这个方程都成立。下面，我们不妨举些例子来证实一下：

$14+27=41$，$47+27=74$，

$25+27=52$，$58+27=85$，

$36+27=63$，$69+27=96$。

看到上面那些算式，你发现规律了吧？任何一个个位上数字比十位上数字大3的两位数，都符合这道题的条件。

接着，我们再来算一道关于三位数的题目。

【题目】求一个满足下列条件的三位数：十位数字是7，百位数字等于个位数字减去4，如果把个位数字和百位数字互换位置，得到的新数比这个数大396，求这个数。

我们给个位数字找个“替身” x，根据题意可以列出如下方程：

$$100x+70+x-4-[100(x-4)+70+x]=396$$

化简这个方程之后，得到如下的等式：

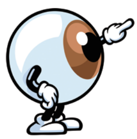
$$396=396$$

通过前面的讲解，我们已经知道这样的结果说明：任意一个三位数，只要它的百位数字比个位数字小4，那么将它们对换位置后，得到的新数都会比原来的三位数大396。如数字175，把它颠倒过来写是571，恰好比175大396，符合我们刚才所得的结论。虽然这些题目有些抽象，但能够帮助我们练习使用“替身”列方程和解方程的技巧。

代　数
奇妙的数字与数列

Entertaining mathematics

在数字王国里，7是个奇妙的数字。稍加留意便会发现身边很多现象都与七有关，比如地球有七大洲和七大奇迹，每星期有七天，彩虹有七种颜色，音乐中有七个音符，家家开门有七件事——柴米油盐酱醋茶，智力游戏中有七巧板，月球运行的周期28天正好是7的倍数，而且也是1至7这7个数字之和……另一组数字142857更神奇，你把它分别从1乘到6，看看有什么结果？如果再把它乘以7，得到的答案居然是999999！枯燥的数字里到底隐藏着什么秘密？快快翻开这一章，找出更多惊人的发现！



神奇的“缺8数”

你能用所学的知识和巧思妙想迅速得到下面这道题的答案吗？

【题目】123456789×987654321＝？

如果使用竖式相乘的方法来计算，恐怕你需要准备一张很大的练习

纸，连计算带检验结果要费上一些时间。现在，我来教你一种特别的方法，利用神奇的“缺 8 数”，即“12345679”来帮忙。

我们先来看看有关“缺 8 数”的一些计算规律：

$12345679\times 9=111111111$

$12345679\times 18=222222222$

$12345679\times 27=333333333$

$12345679\times 36=444444444$

……

$12345679\times 72=888888888$

$12345679\times 81=999999999=10^9-1$

看到这里，你可能会觉得这个“缺 8 数”和“123456789”样子非常接近，那么“123456789”是否也具备以上有趣的等式特征特质呢？我们不妨用“123456789”乘以 81 来试试。

$123456789\times 81=(123456790-1)\times 81=9999999909=10^{10}-91$

从结果发现，“123456789”确实也具备同样的规律，由此可以得出

$123456789\times 987654321$

$$=\frac{(10^{10}-91)}{81}\times 987654321$$

$$=\frac{(10^{10}-91)}{9}\times 109739369$$

$$=\frac{(10^{10}-1)}{9}\times 109739369-1097393690$$

因为 $109739369=12193263\times 9+2$

所以上式 $=(10^{10}-1)\times 12193263+2222222222-1097393690$

$=121932630000000000-12193263+2222222222-1097393690$

$=121932632222222222-1109586953$

$=121932631112635269$

感觉怎么样？这道题的正确答案已经出来了，不算难吧？可能你会有疑问：要是我不了解这个“缺 8 数”的性质，又该怎么解答这道题呢？

这个疑问很好解决，即使你不知道“缺 8 数”，你也可以通过直接乘以 81 的方式来解决，具体过程如下：

因为

$123456789=111111111+11111111+1111111+111111+11111+1111+111+11+1$

所以

$123456789\times 9=999999999+99999999+9999999+999999+99999+9999+999+99+9$

$=(10^9-1)+(10^8-1)+(10^7-1)+\cdots+(10-1)$

$=1111111110-9$

由此得出

$123456789 \times 81 = 9999999990 - 81$

$= 9999999990 + 10 - 10 - 81 = 10^{10} - 91$

你看，数学就是这么奇妙，同一道题，有时只需要变换一下思路，就能找到几种截然不同的解题方法。不过，要想达到顺手拈来的水平，平时要有一定的知识储备，试着去解答不同类型的题目。

无限长的“数”

能将乘法运用娴熟的人都会注意到，几个末位都是 1 或都是 5 的数连乘之后，所得的乘积末位还是 1 或 5。除了末位数字是 0 的数，还有哪个末位数字有这种性质？

聪明的你肯定能立即说出答案：6。的确，末位数字是 6 的数，无论连乘多少次，所得结果的末位数依然是 6。

例如：$46^2 = 2116$；$46^3 = 97336$。

下面，我们来解析一下末位是 6 的数的性质。

首先，可以将这些数字表示成：$10a + 6$，$10b + 6$ 等等，其中 a 和 b 可以取任何正整数。

那么，这两个数的乘积可以表示为：

$(10a + 6)(10b + 6)$

$= 100ab + 60b + 60a + 36$

$= 10(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6$

$= 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6$

由此可见，这两个数的乘积是由 10 的倍数和 6 组成的，所以乘积的末位数当然是 6 啦。

你可以试试用这种方法来证明末位是 1 或 5 的数。

根据上面的规律，我们看一眼就能知道 386^{2567} 的末位数字是 6，815^{723} 的末位数字是 5，491^{1732} 的末位数字是 1，等等。

除了 1、5、6 具有我们上面所说的有趣性质之外，一些两位数也有相似的性质，比如 25 和 76。任意几个末尾同是 25 或 76 的数相乘，所得的乘积末尾还是 25 或 76。

我们以末尾数字为 76 的数来证明

数学有意思

别具韵味的数字诗（三）

○ 以数词作对的佳句

骆宾王。数的抽象概念，在此大放异彩：

百年三万日，一别几十秋。
万行流别泪，九折切惊魂。

杜 甫。数字深化时空的意境：

两个黄鹂鸣翠柳，一行白鹭上青天。
窗含西岭千秋雪，门泊东吴万里船。

李 白。数字表现高度的艺术夸张：

飞流直下三千尺，疑是银河落九天。

柳宗元。数字突出尖锐的对比和衬托作用：

千山鸟飞绝，万径人踪灭。

岳 飞 / 陆 游。数字表达壮怀激烈：

三十功名尘与土，八千里路云和月。
三万里河东入海，五千仞岳上摩天。

白居易。数字揭露了当时统治阶级的穷奢极欲：

一丛深色花，十户中人赋。

李商隐。数字描绘川中壮丽的景色：

一条雪浪吼巫峡，千里火云烧益州。

赵 嘏。数字极尽了中秋钱塘潮的天下奇观：

一千里色中秋月，十万军声半夜潮。

宋无名氏。数字描摹景色，抒发感情：

草铺横野六七里，笛弄晚风三四声。

毛泽东。数字表现作者宏伟的气势：

坐地日行八万里，巡天遥看一千河。

毛泽东。数字对仗工整自然：

斑竹一枝千滴泪，红霞万朵百重衣。

一下，先将这些数表示为 $100a+76$，$100b+76$ 等等，其中 a 和 b 可以取任何正整数。

那么，这两个数的乘积可以表示为：

$$(100a+76)(100b+76)$$
$$=10000ab+7600b+7600a+5776$$
$$=10000ab+7600b+7600a+5700+76$$
$$=100(100ab+76b+76a+57)+76$$

由最后一行的表达式可以看出，乘积的末尾是 76，以此类推，凡是末尾是 76 的数，它的任意次方的末尾依然是 76，如 $376^2=141376$，$576^3=191102976$ 等等。

有许多数的末尾是由多位数字组成的长串数尾，在经过连乘之后，得到的乘积数尾与原来的数尾相同。下面，我们以上面所说的 76 为例，讨论一下在 76 的前面加上一个什么样的数，所得的三位数能够具有这种性质。

假设前面加的数字是 k，得到的三位数可以表示为 $100k+76$，那么末尾是这个三位数的数可以表示为 $1000a+100k+76$，$1000b+100k+76$，等等，其中 a 和 b 可以取任何正整数。

那么，这两个数的乘积可以表示为：

$$(1000a+100k+76)(1000b+100k+76)$$
$$=1000000ab+100000ak+100000bk$$
$$+76000a+76000b+10000k^2+15200k$$
$$+5776$$

上面的表达式，除了最后两项之外，其他各项都能被 1000 整除。只要最后两项的和 $15200k+5776$ 与 $100k+76$ 的差能被 1000 整除，就可以证明所得乘积的数尾是 $100k+76$。

因为

$$15200k+5776-(100k+76)$$
$$=15100k+5700$$
$$=15000k+5000+100(k+7)$$

所以，只有当 k 取 3 时，所得乘积的数尾才能与原来数的数尾相同。也就是说，376 是我们要求的三位数，376 的任意次方的尾数一定是 376，例如 $376^2=141376$。

同理，如果以 376 为例，要找出具有这种性质的四位数，我们就应该在 376 前面再加上一位数，假设是 j，这样就把原来的问题转化成：求 j 是什么数时，$10000a+1000j+376$ 与 $10000b+1000j+376$ 乘积的尾数会是 $1000j+376$？

根据上面那些问题计算过程，现在我们把所得的乘积中能被 10000 整除的各项都舍去，所得到的表达式就是：

$$752000j + 141376$$

只要 $752000j + 141376$ 与 $1000j + 376$ 相减，所得的差能被 10000 整除，就证明乘积的尾数是（$1000j + 376$）。

$$\begin{aligned}
&(752000j + 141376) - (1000j + 376) \\
&= 751000j + 141000 \\
&= (750000j + 140000) + 1000(j + 1) \\
&= 10000(75j + 14) + 1000(j + 1)
\end{aligned}$$

可以看出，只有当 $j = 9$ 的时候，所得的结果才能被 10000 整除，也就是说，符合条件的四位数是 9376。

如果我们继续探索下去，会发现符合条件的五位数是 09376，符合条件的六位数是 109376，符合条件的七位数是 7109376……这样一位一位地增加，可以无限制地进行下去，得到一个有着无数多位数的数：…7109376。

关于苹果的机智问答

有一天，彼得从市场上买回一大筐苹果，妻子安娜问他："这么大的一筐苹果，一共能有多少个？"

彼得诙谐地一笑，没有正面回答妻子，而是给她出了一道题："这一大筐苹果的数目符合这些条件：如果我把苹果 2 个一组数一下，那么还剩下 1 个；如果我分别 3 个一组、4 个一组、5 个一组、6 个一组数一下，都会剩下 1 个；如果我把苹果 7 个一组数一下，刚好一个不剩。你能算出来筐里有多少个苹果吗？"

安娜想了想，很快就得出答案：筐里至少有 301 个苹果！你知道安娜是怎么算出来的吗？

其实，算出答案并不难。根据彼得的叙述，这个数应该满足这样一个条件：既可以被 7 整除，也可以被 2、3、4、5、6 来除，余数是 1。由此，我们先算出能被 2、3、4、5、6 整除的最小数，也就是它们的最小公倍数 60。

接着，我们进一步考虑，什么数能比 60 的倍数大 1，而且还能被 7 整除。按照数学的大小顺序，我们可以一一计算下去：先用 60 + 1 除以 7，余数

是 5，显然不满足题意；再试 $60\times2+1$，结果还是不满足题意……直到 $60\times5+1$，完全符合题意，所以说，筐里至少有 301 个苹果。

这道题涉及一些整除问题，在我们学习数学的过程中，有关“整除”的题目不算少，所以我们来探讨一下跟整除有关的题目。

有一些方法可以帮助我们在没有做除法之前，判断出一个数是否可以被另一个数整除，比如我们熟知的能被 2、3、5、9、10 整除的数的特征。那么，能被 11 整除的数具备什么特征呢？

假设有一个多位数 N，它的个位数是 a，十位数是 b，百位数是 c，千位数是 d……那么，可以用下面的算式来表示 N：

$$N=a+10b+100c+1000d+\cdots$$
$$=a+10(b+10c+100d+\cdots)$$

从 N 中减去一个 11 的倍数：$11(b+10c+100d+\cdots)$ 之后，所得的差为：$a-b-10(c+10d+\cdots)$。用这个数除以 11 之后，所得的余数与 N 直接除以 11 所得的余数是一样的。

给上面那个差数 $a-b-10(c+10d+\cdots)$ 加上 $11(c+10d+\cdots)$ 之后，可以得到 $a-b+c+10(d+\cdots)$。用这个数除以 11 得到的余数，与 N 直接除以 11 所得的余数一样。接着，我们将这个结果再减去一个 11 的倍数 $11(d+\cdots)$，一直进行这样的加减，最后得到下面的结果：

$$a-b+c-d+\cdots=(a+c+\cdots)-(b+d+\cdots)$$

用最终的这个数除以 11 后，所得的余数仍然等于 N 除以 11 所得的余数。

根据以上计算，我们不难得出一个能被 11 整除的数的判断方法：用一个数所有奇数位上数字的总和，减去它所有偶数位上数字的总和，如果所得差数无论是正数还是负数，只要是 0 或 11 的倍数，就说明这个数能被 11 整除。

下面，我们用 87635064 这个数来试一下。按照总结的方法，用奇数位数字的和 14，减去偶数位的和 25，结果是 -11，说明 87635064 能被 11 整除。

除了上面介绍的判断方法以外，我们还可以用另外一种方法判断一个整数能不能被 11 整除，即把要判断的数从右向左，两位为一节进行分节，然后把这些节加起来。如果相加之后

的总和能被 11 整除，那么要判定的数也能被 11 整除。

我们用 528 这个数来做一下实验，把 528 分成 5 和 28 两节，然后将两节相加，得到和 33。因为 33 能被 11 整除，所以 528 也能被 11 整除。

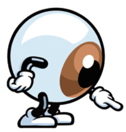
为了证明这个判断方法的正确性，我们可以把一个多位数 N 按照这种分节判断方法进行分节，从右向左，分别将分节后的数字表示为 a、b、c 等，于是 N 可以用下面的形式表达出来：

$$N=a+100b+10000c+\cdots=a+100(b+100c+\cdots)$$

用这个数减去 11 的倍数 99（$b+100c+\cdots$）之后，可得：

$$a+(b+100c+\cdots)$$
$$=a+b+100(c+\cdots)$$

用这个数除以 11 得到的余数，与 N 除以 11 得到的余数相等。再用这个数减去 99（$c+\cdots$），这样一直进行下去，结果我们能得到：数 N 除以 11 所得的余数，与数 $a+b+c+\cdots$除以 11 所得的余数相同。



寻找逃跑汽车的牌号

【题目】一辆小汽车在一个十字路口闯红灯，撞倒一位过路行人后逃跑了。赶到现场的警察向目击者了解肇事车辆的一些信息，一个目击者说，汽车牌号的最后两位数字相同；另一个目击者说，车牌号的前两位数字也相同；第三个目击者说，车牌号是四位数，而且是一个完全平方数。聪明的警察根据了解到的情况，很快找到肇事车辆，抓住了逃跑的司机。你知道肇事车辆的车牌号是多少吗?

数学帮忙找到肇事逃逸车辆。

因为肇事车辆的车牌号是个四位数，而且前两位相同，后两位相同，所以我们可以设所求四位数的第一位数字是 a，第三位数字是 b。

那么，可以将这个四位数表示为：

$1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b)$

这是个能被 11 整除的数，而且还是个完全平方数，因此应该可以被 121 整除，也就是说，$100a+b$ 是一个能被 11 整除的数。

利用上一节学习的能被 11 整除的数的特征，我们可得出 $a+b$ 能被 11 整除的结论。由于 a 和 b 都小于 10，所以只有 $a+b=11$ 这一种情况。

又因为整个车牌号是一个完全平方数，所以对于它来说，最后一位数字 b 所有可取的数字为：0、1、4、5、6、9。

综上所述，所有 a 能取的数字为：7、6、5、2。根据 $a+b=11$ 可得出下面四组答案：

$a=7$，$b=4$；$a=6$，$b=5$；$a=5$，$b=6$；$a=2$，$b=9$。与此相对应的四位数为 7744，6655，5566，2299。其中 6655，5566，2299 不是完全平方数，只有 7744 是所求的四位数，也就是肇事车辆的车牌号。

看似荒谬但正确的等式

在数学世界里，经常会出现一些有规律的等式，掌握这些规律并加以运用，可以明显加快计算的速度。你先看看下面这个等式：

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}$$

在没学过分数和乘方之前，也许你这样计算过此类算式，得到的答案绝大多数都是错的。如果你现在已经学过分数计算和乘方计算，你肯定会第一时间给前面那个算式的结果画一个大叉。你的主观意识会想：这怎么可能对呢？试卷上多少判断题都是这种类型的，我做得多了！一看就是错的！

人的主观意识和习惯时不时会令

人犯错，这个算式看似荒谬，其实每一步都是对的，结果也是对的！不信的话，你可以亲自演算一下。

也许你认为这只是个特例，根本不具备代表性，但事实上，这种“荒谬”的等式已经被证实是正确的，因为它们具备如下规律：

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$$

能满足这个等式的 a 和 b 不计其数，如：

$$\frac{4^3+3^3}{4^3+(4-3)^3}=\frac{4+3}{4+(4-3)}=\frac{7}{5}$$

$$\frac{8^3+7^3}{8^3+(8-7)^3}=\frac{8+7}{8+(8-7)}=\frac{15}{9}$$

……

所以说，这个看似“荒谬”的等式其实并不荒谬，只要我们掌握了其中的规律，就会发现它不但是一个正确的等式，而且还是一个趣味十足的等式。

滑稽的等式

做数学题的时候，有些错误非常浅显，在你刚上学甚至没上学的时候，就知道那是错的，比如 $2=3$。不过，如果这个错误有一个非常正确的开始，然后顺着看似正确的思路一步一步推断，让你觉得每一步都没有问题，最后却得出错得离谱的结论，且检查不出是哪一步错了，就会使我们顿时迷惑不已。下面，我们就来见识一下这些滑稽的等式吧！

我们先来看下面这个无可争辩、肯定成立的等式：

$$4-10=9-15$$

然后在等式两边同时加上 $6\frac{1}{4}$：

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$$

之后，将这个等式化为如下形式：

$$2^2-2\times2\times\frac{5}{2}+(\frac{5}{2})^2$$

$$=3^2-2\times3\times\frac{5}{2}+(\frac{5}{2})^2$$

然后变成下面的形式：

$$(2-\frac{5}{2})^2=(3-\frac{5}{2})^2$$

去除平方之后，得到：

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$$

在等式两边同时加上$\frac{5}{2}$，得到：

$$2=3$$

就这样，荒谬滑稽的等式出现了！这个结果显然是错误的，但问题究竟出在什么地方呢？

其实，错误隐藏在去除平方的那一步，我们从$(2-\frac{5}{2})^2=(3-\frac{5}{2})^2$得出$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$的结果是错误的，正确结果如下：

$$(2-\frac{5}{2})^2=(3-\frac{5}{2})^2$$

$$(-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$$

显而易见，$-\frac{1}{2}$可不等于$\frac{1}{2}$。

接着，我们再来表演一出数字计算的滑稽剧。先写下一个无可争辩的等式：

$$16-36=25-45$$

然后，等式两边同时加上$20\frac{1}{4}$，变成：

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}$$

之后，将这个等式化为如下形式：

$$4^2-2\times4\times\frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2$$

$$=5^2-2\times5\times\frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2$$

$$(4-\frac{9}{2})^2=(5-\frac{9}{2})^2$$

利用以前的不合理推论，得出结果：

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

$$4=5$$

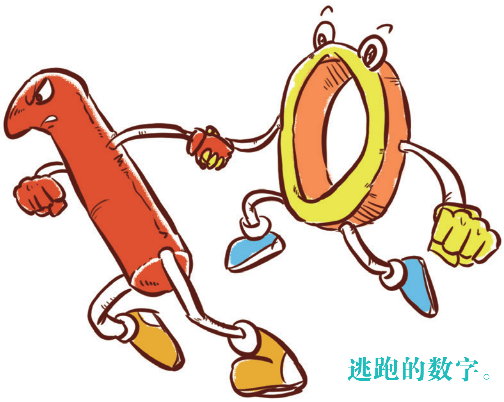
这显然是个错误的等式。

以上两个滑稽等式的例子告诉我们，做题一定要认真，不能用想当然的结论去计算，不然就会出现可笑的错误。

逃跑的数字

在学习数学的过程中，我们会发现有些数字非常调皮，常常利用自身特质跟我们玩有趣的游戏，让我们体会到数字及其运算的无

穷尽的魅力。



逃跑的数字。

看看下面各由三个六位数组成的两组数字，如果分别将两组数字加起来，会得到什么有趣的结果呢？

第一组：123789　561945　642864

第二组：242868　323787　761943

$123789+561945+642864$

$=242868+323787+761943$

这两组数字的和是相等的。看到这里，你可能很不以为然，找两组加起来和相等的数还不容易啊，这有什么稀奇的！

先别急，你再接着看下面的等式：

$123789^2+561945^2+642864^2$

$=242868^2+323787^2+761943^2$

现在，我们让每个数从左起的第一个数字“逃跑”：

$23789+61945+42864$

$=42868+23787+61943$

$23789^2+61945^2+42864^2$

$=42868^2+23787^2+61943^2$

看到没？等式依然成立！这回你知道这两组数不简单了吧？哈哈，你再继续看数字“逃跑”：

$3789+1945+2864$

$=2868+3787+1943$

$3789^2+1945^2+2864^2$

$=2868^2+3787^2+1943^2$

惊讶没？震惊没？很牛吧？我们再接着“逃跑”：

$789+945+864$

$=868+787+943$

$789^2+945^2+864^2$

$=868^2+787^2+943^2$

继续“逃跑”：

$89+45+64=68+87+43$

$89^2+45^2+64^2=68^2+87^2+43^2$

“逃逃逃”：

$9+5+4=8+7+3$

$9^2+5^2+4^2=8^2+7^2+3^2$

怎么样，“逃”到每个数只剩下一个数字，等式仍然屹立不倒！

如果这还不够令人震撼，我们再从右向左“逃”一次：

$12378+56194+64286=24286+32378+76194$

数学有意思

回文数与回文诗

数学与文学有着相似之处,如数学中有回文数,诗中有回文诗便是例子。

在正整数中，有种数无论从左往右，还是从右往左读，都是一个数，我们称这样的数为“回文数”如 88，454，7337，43534 等都是回文数。有一种诗，顺念倒念都有意思，我们称这样的诗为“回文诗”。如：

云边月影沙边雁，水外天光山外树。

倒过来读，便是：

树外山光天外水，雁边沙影月边云。

其意境和韵味读来真是一种享受!

另外，还有苏轼的一首回文诗也令人拍案叫绝：

潮随暗浪雪山倾，远浦渔舟钓月明。
桥对寺门松径小，巷当泉眼石波清。
迢迢远树江天晓，蔼蔼红霞晚日晴。
遥望四山云接水，碧峰千点数鸥轻。

让我们把这首七律由后往前读下去，就成了：

轻鸥数点千峰碧，水接云山四望遥。
晴日晚霞红蔼蔼，晓天江树远迢迢。
清波石眼泉当巷，小径松门寺对桥。
明月钓舟渔浦远，倾山雪浪暗随潮。

这不是一首与原诗意境相同的优美的七律吗?

$12378^2+56194^2+64286^2=24286^2$

$+32378^2+76194^2$

……

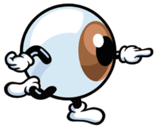
一直“逃”到只剩下一个数字，等式关系仍然成立!

$1+5+6=2+3+7$

$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$

看到数字为我们上演的这场“逃

跑”秀，我们能不惊叹数学世界的奇妙吗？其实，还有很多这样神奇有趣的数字等待我们去发现，去探索，一起加油努力吧！



有意思的两位数

【题目】有这样一些成对的两位数，当我们把它们的十位数和个位数对调时，他们的乘积是不变的，例如，46 和 96：

$$46\times96=4416=64\times69。$$

除了 46 和 69 之外，还有哪些成对的两位数也是这样的呢？

设所求数的个位和十位上的数字分别为 x 和 y，z 和 t，根据题意我们可以列出方程：

$$(10x+y)(10z+t)=(10y+x)(10t+z)$$

化简以后，可得：

$$xz=yt$$

这里 x、y、z、t 均为小于 10 的正整数，为了求出符合条件的解，我们可以找出从 1 到 9 的 9 个数字中所有乘积相等的每一对数字：

$1\times4=2\times2$，$1\times6=2\times3$，$1\times8=2\times4$

$1\times9=3\times3$，$2\times6=3\times4$，$2\times8=4\times4$

$2\times9=3\times6$，$3\times8=4\times6$，$4\times9=6\times6$

一共有 9 个符合条件的等式。从每个等式中，我们可以得出一组或者两组符合条件的数字。例如，对于等式 $1\times4=2\times2$ 来说，可以找出这样一组符合条件的数字：

$$12\times42=21\times24$$

对于等式 $1\times6=2\times3$ 来说，可以找出两组符合条件的数字：

$12\times63=21\times36$，$13\times62=31\times26$

这样继续组合下去，我们一共能找到 14 组十位数和个位数对调后，乘积仍不变的数字：

$12\times42=21\times24$，$23\times96=32\times69$

$12\times63=21\times36$，$24\times63=42\times36$

$12\times84=21\times48$，$24\times84=42\times48$

$13\times62=31\times26$，$26\times93=62\times39$

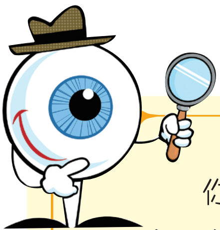
$13\times93=31\times39$，$34\times86=43\times68$

$14\times82=41\times28$，$36\times84=63\times48$

$23\times64=32\times46$，$46\times96=64\times69$

代 数
有趣的无穷多

Entertaining mathematics



你知道世界上最大的数是什么吗？为了得出这个答案，许多数学家上下求索。在东方，人们把“极”看做最大的数，相当于10^{48}。阿基米德曾经思考：“把太空和大地都用沙粒装满，会需要多少沙子呢？”从这个问题出发，他得到10^{51}这样庞大的数字。在印度，人们找到比“极”更大的数10^{52}，被称作“恒河沙”。但是，它们都不是世界上最大的数，因为数是无穷多的，根本没有尽头！这一章，我们来探索一下数学的级数问题。

古老的级数问题

有个故事大家可能都听过：国王要重赏发明国际象棋的大臣，大臣只要摆在棋盘黑白格上以几何级数增多的麦粒。当时很多人不以为然，结果后来发现那是一个非常庞大的数字。后来，有人统计了一下，

那个数字几乎是全世界 2000 年加起来收获的总麦粒数。

这个奖励麦粒的问题，其实就是一道级数问题。在埃及著名的林德氏草纸文献中，有一道更古老的级数问题，大约编写于公元前 2000 年，是一道关于分面包的问题。

【题目】五个人分一百份面包，后面一个人总比前面一个人分的多，而且多的份数相同。已知前两人所分面包总数是后三人所分面包总数的七分之一，求五个人各分到多少份面包。

从题目很容易看出，五个人所分的面包是一个递增的级数。我们假设第一个人分到的面包是 x 份，下一个人比前一个人多分 y 份，那么大家分到的面包数量如下：

第一个人：x

第二个人：$x+y$

第三个人：$x+2y$

第四个人：$x+3y$

第五个人：$x+4y$

根据题意，列出如下方程组：

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \\ \quad =100 \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{cases}$$

化简后得：$\begin{cases} x+2y=20 \\ 11x=2y \end{cases}$

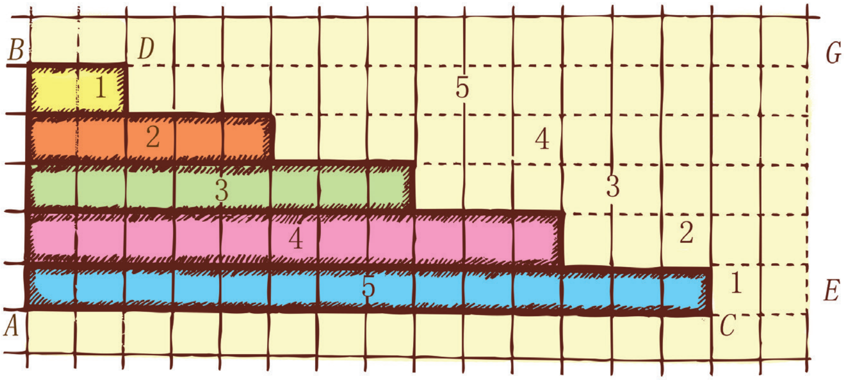
解方程组，可得：

$$x=1\frac{2}{3} \qquad y=9\frac{1}{6}$$

将所得结果代入算式，可求得五个人所分面包数量依次为：$1\frac{2}{3}$，$10\frac{5}{6}$，20，$29\frac{1}{6}$，$38\frac{1}{3}$。

级数的计算公式

虽然级数问题已经出现几千年，但在三百年前，还没有人总结出关于级数的计算公式。后来，聪明的人们想到一种很简单的方法，可以很快计算出级数的和。不过，这种方法要借助一种工具，就是方格纸。



运用台阶式表格帮助推导求和公式

如图所示，我们可以在方格纸上，用一个台阶式图形表示出任何一个数学级数，*ABDC* 表示的就是级数 2，5，8，11，14。要求出这个级数的和非常容易，只需要把台阶式图形扩成一个如图的长方形 *ABGE*。

从图中可以看出，*ABDC* 与 *DGEC* 的面积相等，都是长方形 *ABGE* 的一半，*ABDC* 的面积就是所求级数的和。

因为长方形 *ABGE* 的面积为：

$$(AC+CE)\times AB=16\times5=80$$

据此，可以求出 *ABDC* 的面积：

$$S=\frac{1}{2}(AC+CE)\times AB=40$$

即所求级数的和为 40。

由于 $AC+CE$ 表示的是级数第一项和最后一项的和，*AB* 表示级数的总项数，我们可以推断出级数求和公式：

$$S=\frac{1}{2}（首尾两项的和）\times（项数）$$

也就是：

$$S=\frac{（首项+末项）\times（项数）}{2}$$

巧妙的分配

【题目】有位老人把一群牛分给儿子们。给第一个儿子的是 1 头牛及剩余部分的 $\frac{1}{7}$，给第二个儿子的是 2 头牛及剩余部分的 $\frac{1}{7}$，给第三个儿子的是 3

头牛及剩余部分的$\frac{1}{7}$，给第四个儿子的是4头牛及剩余部分的$\frac{1}{7}$……这样一直分下去，给最后一个儿子分完，老人的牛恰好一头不剩。这时，儿子们意外地发现，他们分到的牛一样多。问：老人有多少个儿子？多少头牛？

假设老人一共有n个儿子，每个儿子分到x头牛，那么老人一共有nx头牛。根据题意，最后一个儿子分到的牛应该是$n+\frac{1}{7}(x-n)$头，剩下$\frac{6}{7}(x-n)$头，但事实上，牛分到他这儿时正好全部分完，所以$x-n=0$，得到$x=n$。也就是说，牛的总数$nx=n^2$。

由此可以得出，第一个儿子分到的牛的数量满足关系式：

$$1+\frac{1}{7}(n^2-1)=n$$

变换后可得：

$$n^2-7n+6=0$$

$$(n-1)(n-6)=0$$

根据题意，我们知道$n>1$，所以这道题的答案是$n=6$。

由此我们可知，老人一共有6个儿子，每个儿子分得6头牛，一共是36头牛。

如果不用未知数“替身”，能不能求出这道题的答案呢？这就是数学的魅力之一了，同一道题也许有好几种解答方法。

我们仍然从最小的儿子入手，他得到的牛的数量，应该等于儿子的人数，牛群余数的$\frac{1}{7}$对他来说没有意义，因为在他之后就没有剩余的牛了。

那么，排在小儿子前面的哥哥，得到的牛的数量比小儿子得到的少1头，并加上剩余牛群的$\frac{1}{7}$。也就是说，小儿子得到的是剩余牛群的$\frac{6}{7}$，应该能被6除尽。

假设小儿子得到了6头牛，那么他就是老人的第六个儿子，说明老人有6个儿子。第五个儿子应该分到5头牛加7头牛的$\frac{1}{7}$，即6头牛。

现在，第五个儿子和第六个儿子一共分到$6+6=12$头牛，那么第四个儿子分得4头牛后，牛群的余数是$12\div\frac{6}{7}=14$头牛，第四个儿子分到$4+14\times\frac{1}{7}=6$头牛。

接着，我们计算第三个儿子分完

以后牛群的数量：6＋6＋6＝18。占牛群余数的$\frac{6}{7}$，由此得出余数为$18 \div \frac{6}{7} = 21$头。第三个儿子应该分到$3 + 21 \times \frac{1}{7} = 6$头牛。

用同样的方法可以算出，长子和次子各分到6头牛。我们的假设得到证实，老人一共有6个儿子，36头牛。

那么，还有没有别的答案呢？假设儿子的人数不是6，而是6的倍数12，18等等。通过计算，我们会发现这个假设行不通，就不用费脑筋再往下试验了。

浇菜园的路程

【题目】一块菜地有30个菜畦(qí)，每畦长为16米，宽为2.5米。菜农需要从离菜园边界14米远的一口水井中提水浇菜地。在浇水的过程中，菜农只能沿着地界走，每次提水都得绕着菜畦的边界走一圈，而且每次提的水都只够浇一个菜畦。假如路程的起点和终点都以水井为准，那么菜农浇完整块菜园一共需要走多远的路？

如果没有图片，住在城市里的你恐怕都不知道“菜畦”是什么吧？看看图片，你会发现解这道题很容易，可以利用前面得到的级数的计算公式。

由题意得知，菜农在浇第一个菜畦时，所走的路程是：

$$14 + 16 + 2.5 + 16 + 2.5 + 14 = 65（米）$$

菜农浇完菜地要走长的路程？

在浇第二个菜畦时，所走的路程是：

$14+2.5+16+2.5+16+2.5+2.5+14=65+5=70$（米）

由题意不难看出，菜农浇后面每一个菜畦时，所走的路程都比浇前一个菜畦多 5 米，据此可以得出一列级数：

$65，70，75，\cdots，65+5\times29$

根据级数求和公式，可以求出这列级数的总和：

$$\frac{[65+(65+29\times5)]\times30}{2}=4125（米）$$

所以，菜农要走 4125 米才能浇完整块菜地。

养鸡场里的级数

【题目】一个养鸡场为了养 31 只鸡，按照每只鸡每周一桶的食量贮存了一批饲料。本来以为鸡的数量保持不变，没想到每周都会减少一只，结果贮存的饲料维持了原定期限两倍的时间。问：贮存的饲料一共有多少？原来计划维持的时间是多长？

假设贮存的饲料为 x 桶，预计维持的时间是 y 周，根据题意可得：

$x=31y$

由于每周都会少一只鸡，所以每周消耗的饲料会减少一桶，也就是第一周消耗了 31 桶，第二周消耗了 30 桶，第三周消耗了 29 桶……直到最后一周，消耗了（$31-2y+1$）桶。

据此，我们可以列出下面的等式：

$x=31y=31+30+29+\cdots+(31-2y+1)$

利用级数的求和公式，可得：

$$31y=\frac{(31+31-2y+1)2y}{2}$$

$$=(63-2y)y$$

因为 $y\neq0$，所以化简后可得：

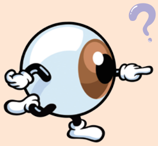
$31=63-2y$

因此

$y=16$

将 $y=16$ 代入 $x=31y$，得到 $x=496$。

所以贮存的饲料一共有 496 桶，原来计划维持的时间是 16 周。



水果店原有多少苹果

【题目】一位水果店的老板卖给他的第一位顾客所有苹果的一半加半个；卖给他的第二位顾客剩下苹果的一半加半个；卖给他的第三位顾客还是剩下苹果的一半加半个……这样一直卖下去，直到第七位顾客，买走他所剩苹果的一半加半个之后，所有的苹果刚好卖完。问：这家水果店原来共有多少苹果？

你可能会想，这位老板为什么把苹果切开卖？没见哪个水果店特意卖切开的苹果，除非那个苹果烂掉一部分。且不说老板为什么切开苹果卖，没准他是个数学迷呢！

我们假设这家水果店原来共有 x 个苹果，由此我们可以推断出每位顾客所买的苹果数量。

第一位顾客：$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$

第二位顾客：

$$\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$$

第三位顾客：

$$\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$$

……

第七位顾客：$\frac{x+1}{2^7}$

由此，我们可以列出如下方程：

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\cdots+\frac{x+1}{2^6}+\frac{x+1}{2^7}=x$$

整理后，得到：

$$(x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^7})=x$$

通过计算整理，得出：

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

解方程，得：

$x=2^7-1$

$x=127$

也就是说，水果店原来共有 127 个苹果。第七位顾客来到水果店的时候，只剩下一个苹果，所以他买了剩下的“一半”加半个，正好是一个苹

果。你说，当水果店老板一边嘟囔着“剩下的一半加半个”，一边把好端端的一个苹果切成两半卖给第七位顾客时，那位顾客会不会觉得很抓狂？

草履虫变成大太阳

有时候，本来很小的一个数，如果用 2 累次乘它，所得的结果会迅速变大，大到出乎你的意料，令你大吃一惊！

我们现在来详细讲讲那个“象棋盘上的麦粒”的古老的传说：国王要重赏发明国际象棋的大臣，问他想要什么奖励。大臣回答说：“臣只要些摆在棋盘黑白格上的麦粒即可。只不过要添加一个条件：在棋盘的第一个小方格上放 1 颗麦粒，第二个小方格上放 2 颗麦粒，第三个小方格上放 4 颗麦粒，第四个小方格上放 8 颗麦粒……以此类推，将 64 个小方格都放满。”

国王有些诧异，问：“你确定只要这个奖赏吗？”

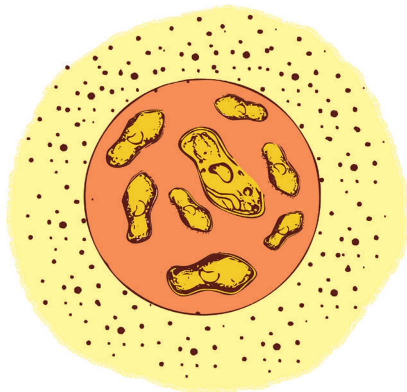
大臣回答说：“臣确定。”

于是，国王吩咐侍卫按照大臣的要求查取麦粒，你猜怎么着？侍卫们忙了好久才算好数目，一共是 18446744073709551615 粒，这个数字很惊人，就算把全球的麦粒都收集来，也达不到这个数。

下面，我们再来体会一下乘方累积的惊人效应。首先，简单介绍一下草履虫是什么。草履虫是动物界最原始、最低等的原生动物，是一种非常小的圆筒形动物，小到你瞪大眼睛也看不清楚。1 毫米够小了吧，把 1 毫米平均分成 1000 份，每一份是 1 微米，最常见的草履虫身长只有 180 到 280 微米长，有的只有 80 微米长。草履虫的生殖方式叫做横二裂，即在虫体中央横裂为两个相同的虫体，所分裂出的虫体与原先的虫体相同。下面的题目就跟草履虫的分裂生殖有关。

【题目】草履虫平均每 27 小时分

裂一次，每分裂一次，原来的一个就会变成相同的两个。假如所有以这种方式分裂而来的草履虫都能够存活，那么一个草履虫分裂 40 代以后，所有后代所占的体积是 1 立方米。现在，已知太阳的体积为 10^{27} 立方米，问一个草履虫需要多长时间，才能使分裂出来的后代的总体积像太阳那么大？



一只草履虫不到半年的时间就可以分裂得跟太阳一样大。

根据上面列出的已知条件，我们可以将这个问题先转化为 1 立方米需要用 2 累乘多少次，才能达到 10^{27} 立方米这个体积。

因为 $2^{10}\approx1000$，所以可以把 10^{27} 写成：$10^{27}=(10^3)^9\approx(2^{10})^9=2^{90}$

也就是说，1 立方米需要用 2 累乘 90 次，才能达到 10^{27} 立方米。如果从第一代算起，一只草履虫需要经过 $40+90=130$ 次的分裂，才能达到 10^{27} 立方米的体积。

根据题意，草履虫平均每 27 小时分裂一次，分裂 130 次需要的时间：$27\times130=3510$ 小时。

因为每天有 24 个小时，所以换成天数为：$3510\div24=146.25$ 天。

也就是说，草履虫在第 147 天可以分裂出第 130 代子孙，而且所有后代的总体积跟太阳一样大。

同样，我们把刚才关于草履虫和太阳的问题反过来问：如果太阳平均分裂成两半，其中一半又平均分裂成两半，这样一直平均分裂下去，分裂多少次才能像草履虫那么小？

如果没有经过前面那些计算，你肯定以为这是一个很庞大的数字，毕竟草履虫那么微小，太阳那么巨大，可答案竟然只是 130 次，少得令人惊讶！

马蹄铁上的钉子

马蹄铁上的钉子钱翻倍加起来也不是个小数目。

有个人以 1000 元的价格卖了一匹马。但买主回家想了想，觉得不划算，就牵着马回去，非要将马退给卖主。卖主无奈地说："如果你觉得这马太贵，那就只买马蹄铁上的钉子吧，如果你同意，我可以把马白送给你。"

买主问："马蹄铁上的钉子多少钱一个？"卖主说："每个马蹄铁上有 6 个钉子。第一个钉子 $\frac{1}{4}$ 分，第二个钉子 $\frac{1}{2}$ 分，第三个钉子 1 分，第四个钉子 2 分，就这样一直算下去。"

买主觉得这简直太划算了，这些钉子加起来能有几个钱，简直是白白得到一匹马！于是毫不犹豫答应了。你知道买主需要花多少钱才能买下这些钉子吗？

这个买主有些太轻"敌"了，俗话说占小便宜吃大亏，买主以为自己占了小便宜，其实呢？恐怕他要大大花费一笔钱了！下面，我们来算算他究竟花了多少钱。

根据题意，买下所有马蹄铁上的钉子需要的钱为：

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{24-3}$$

$$=\frac{2^{21}\times 2-\frac{1}{4}}{2-1}$$

$$=2^{22}-\frac{1}{4}$$

$$=4194303\frac{3}{4}\text{（分）}$$

≈41943 元

答案揭晓了，买主至少需要41943 元才能买下那些钉子，根本没有像他想的那样占到便宜！在这种情况下，卖主当然愿意将马白白送给他了。

数学有意思

数字谐音记忆

新中国成立前，浙江省某处山下有一所小学，校内有一名数学教师经常和山顶上庙内的一个和尚喝酒下棋。有一次，他布置作业：学生背诵圆周率，要求背到小数点后 22 位，即

3.1415926535897932384626

背不出来的就要打手心。谁知等他喝酒下棋之后回来，学生们都能背诵出来。教师很奇怪，后查得原来是一名聪明的学生把先生喝酒的事用谐音编成了一个故事。故事情节是：

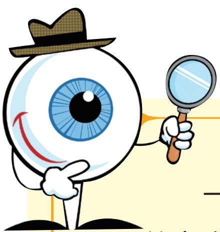
山巅一师一壶酒，尔乐苦煞吾，把酒吃，酒杀尔，杀不死，乐尔乐！

3.14159，26535，897，932，384，626

记住了情节，就记下了小数点后 22 位圆周率的数字。

几　何
到树林里测一测

Entertaining mathematics



一支笔有多长？一把尺子便能告诉你答案。爸爸妈妈的身高是多少？用尺子也能测量出来。若是问一栋摩天大楼有多高，胡夫金字塔的高度怎么测量，你能想出好办法吗？很久很久以前，数学达人泰勒斯采用一种新方法，测出了胡夫金字塔的准确高度。沿用这种方法，人们还推算出了自由女神像、埃菲尔铁塔、七星级帆船酒店等许多著名建筑的高度。想知道泰勒斯的秘密吗？挑一个晴朗的天气钻进树林里，看看它有没有藏在某个角落！

太阳阴影测高法

我很喜欢经常到树林中玩耍。有一天，我遇见一位秃顶的守林老人，他正在一棵大松树下摆弄一个四方木板样子的小东西。我问他在做什么，他回答说：“我在用仪器测量松树的高度。”

我以为他要带着那个小巧的仪器爬上树梢测量树高，然而他丝毫没有爬树的意思，而是把仪器装到口袋里，告诉我说："我已经测量好了。"

当时的我无比惊讶，即使到现在也没有忘记那种震撼。要知道，对于年幼无知的我而言，测量树高的办法只有把树砍倒测量、爬上树梢测量这两种笨方法，而这位秃顶的守林老人仅仅用一个小仪器，就能测量出大松树的高度，这简直是神奇的魔术！

长大以后，我才明白守林老人是利用几何原理来测量大树的高度，而且运用几何原理进行测高的方法非常多，很久很久以前，古希腊哲学家泰勒斯就曾使用过，他利用金字塔在地面的阴影，测量出金字塔的高度，让法老和祭司大为惊叹。

其实，泰勒斯能借助阴影解决测量金字塔高度的难题，是因为他发现了关于三角形的一个特征：等腰三角形的两个底角相等，等角所对应的两边也相等。后来，希腊数学家欧几里得又发现了三角形的其他特征，并撰写了一部著作，成为后人学习的教材。

如果让你说出所有三角形具备的特征，你最先说出的很可能是以下两点：（1）三角形由三条边围成；（2）三角形三个内角的和是 180 度。

正是由于三角形的这些特征，泰勒斯断定，当一个人的身影和身高等长时，太阳光此时是以 45 度角投射到平地上的。因此，金字塔的塔尖顶点、塔底中心点和塔的阴影端点之间，正好构成一个等腰直角三角形。

不过，泰勒斯的方法最适合在晴朗的日子里，对单独的树木进行测量，因为它有很大的局限性：如果在树木林立的树林里测量，树木的影子往往会与旁边树木的阴影重叠在一起，不便测量；再则如在高纬度地区，太阳经常低垂于地平线上，很难等到合适的测量时机，只有等到夏季正午时分，才能使用这种办法。

但是，这个局限性并非不能克服，人们总会想出一些好办法来改进，让你几乎可以随时使用这种测高法。在测量高度时，我们先测出自己的身影，或者一根木杆的阴影长度，然后测量所测物的阴影长度，根据它们之间的比例进行计算，就可以得到所测物的高度（图 1）。

$AB : ab = BC : bc$

其实，这是利用△ABC 和△abc

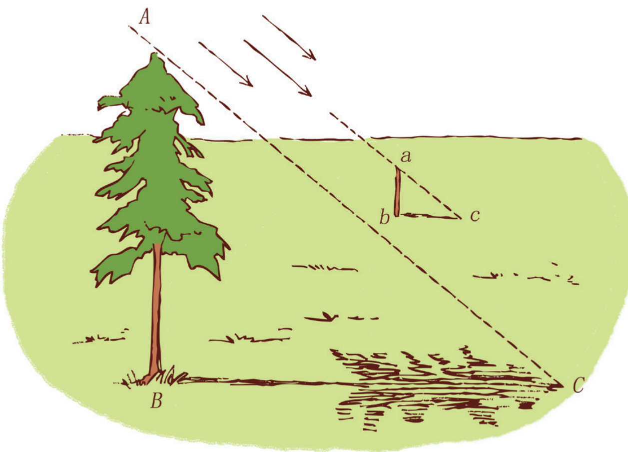


图1｜根据阴影测量树的高度。

木桩 ab 大约高出两倍，而木柱的阴影 BC 却比木桩的阴影 bc 多出约 7 倍，这是怎么回事呢?

原来，太阳光线和路灯光线并不一样，路灯是点式光源，光线发散，而太阳光线是彼此平行的。虽然太阳光线在放射出的瞬间交织在一起，但交织的角度小得可以忽略不计，举一个很简单的例子就能证明。

假设从太阳某点放射出的两道光线，落在地球表面相距一千米的两个地点。如果有一个无限大的圆规，可以把圆规一只脚放在发射光线的那个

的相似原理所推出的，简单点说，就是树影是你身影长度的几倍，树高就是你身高的几倍。

怎么样，又学到一个新知识了吧?当你某天在野外需要测量物高的时候，就可以使用这种办法。不过，我们不能死记这个规则，而是要真正掌握这其中的几何原理，才能做到测量无误，因为在一种情况下，用影子测量的规则并不适用。

究竟是哪一种情况呢?你看看右面的图片（图 2）。在路灯灯光投射出阴影的情况下，木柱 AB 比

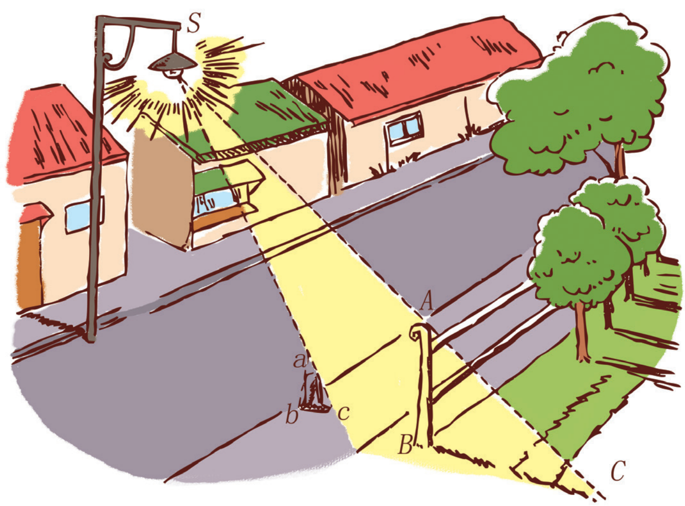


图2｜点式光源条件下不适合阴影测高法。

点上，另一只脚以太阳到地面的距离 15×10^7 千米为半径画一个圆。通过计算，两道光线半径之间的圆弧长度达到 1 千米，而画出来的巨大圆周长应该是 $2\pi\times15\times10^7$ 千米 $=94\times10^7$ 千米。

这个大圆周每一度的弧长都是圆周的 $\frac{1}{360}$，约为 26×10^5 千米。一弧分是一度的 $\frac{1}{60}$，也就是约 43000 千米；一弧秒又是一弧分的 $\frac{1}{60}$，也就是约 720 千米，而我们假设的圆弧长只有 1 千米，与之对应的角才有 $\frac{1}{720}$ 秒，目前即使再精确的天文仪器，也难以测量出如此微小的角度。因此，在测量实践中，我们完全可以认为太阳光线之间是彼此平行的。

在阴影测量法的具体运用当中，还存在一个问题。由于太阳并不是一个点状光源，而是由无数点及其放射出的光线所组成的巨大发光体，所以太阳光投射出的阴影尽头总有一道轮廓不清晰、颜色暗淡的半影，很难确定它的界线，所以无法做到完全精确测量出阴影的长度。

我们可以看看图示（图 3）。树影 BC 段后面就有一段半影 CD，而半影 CD 与树顶 A 形成的 $\angle CAD$，与我们平时看太阳圆面所夹的角度其实是相等的，叫做半度。因此，即使在太阳所处位置并不低的情况下，这两个阴影测量的不精确性，可能带来 5％ 或更多的误差。有的时候，我们还要考虑地面不够平坦等无法避免的因素，因此在一些地表面起伏较大的地方，不宜采用阴影测高法。

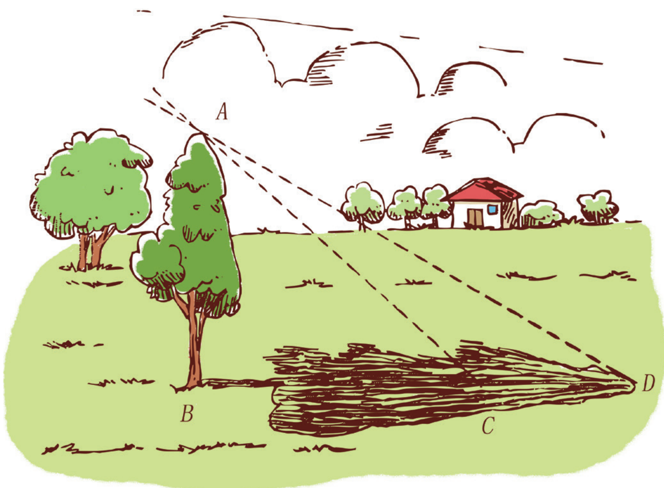


图3 ｜ 地表起伏过大的地方也不适合阴影测高法。

两种简单易行的测高法

除了借助阴影，当我们在野外的时候，还有其他办法能简单快捷地测量出我们需要的高度吗？当然有啦！下面，我来教给你两种简单易行的测高法。

一种方法是自制简易测量仪。测量仪所需要的材料非常简单：一块表面光滑的木板，一张纸，一支笔，三枚大头针，一个小重物。先在木板的一面画上一个等腰直角三角形，如果没有工具，可以把一张纸对折两次，就能得到一个直角，再利用这张纸量出相等的距离。画好等腰直角三角形以后，把三枚大头针分别钉在三个顶点上，测量仪就做好了（图 1）。

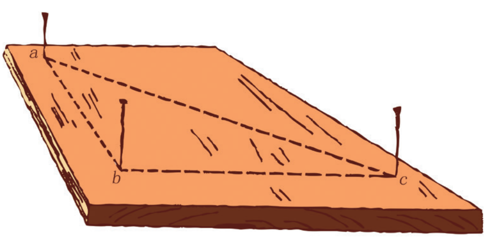


图1 | 大头针测高器。

拿着测量仪，与被测树木拉开一定距离，然后在 a 点绑一根下端系小重物的细线，使三角形的直角边 ab 始终与地面垂直。接着，通过改变与被测树木的距离，找到点 A，使得当你从点 A 经大头针 a 和 c 朝树顶 C 的方向望去时，树顶 C 恰好能被挡住。也就是说，斜边 ac 的延长线通过点 C，

奇趣数字

“从无到有”与“黑暗”的“一”

一些国家和民族对某些自然数有特殊的情感，表现出不同的好恶，反映出不同民族的习俗和文化背景，仔细研究一下，非常有意思。

中国古人认为，万物均由天地阴阳交感而成，形成了道生一，一生二，二生三，三生天地，天地生阴阳，阴阳生万物的数学关系观，“一”有着“从无到有”的开创性意义，而在 3000 年前的巴比伦数学中，“1”是一个不祥的数字，1 万称为“黑暗”，1 万万则是“黑暗的黑暗”。

即 aBC 又构成一个直角三角形，因为 $\angle\alpha=45°$，所以 $aB=CB$。又因为 $AD=aB$，所以只需要在平地上量出你跟树木之间的距离 AD，再加上与你身高相等的 BD，就可以得出树高 CD（图 2）。

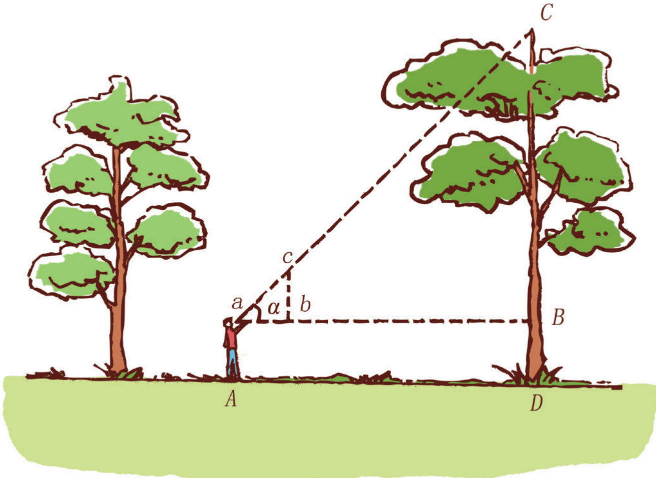


图2 | 大头针测高器使用方法示意图。

如果你嫌制作仪器太麻烦，我再教你一种更简单的办法。你只需要找到一根长木杆，把它垂直插入地面，使其露在地面上的高度等于你的身高。不过，你得找到一个满足条件的插杆地点，当你脚靠木杆，仰面躺在地上时，正好可以看到木杆和树顶在同一条直线上。因为△Aba 是等腰直角三角形，所以通过测量 AB，即可得到所求树高（图 3）。

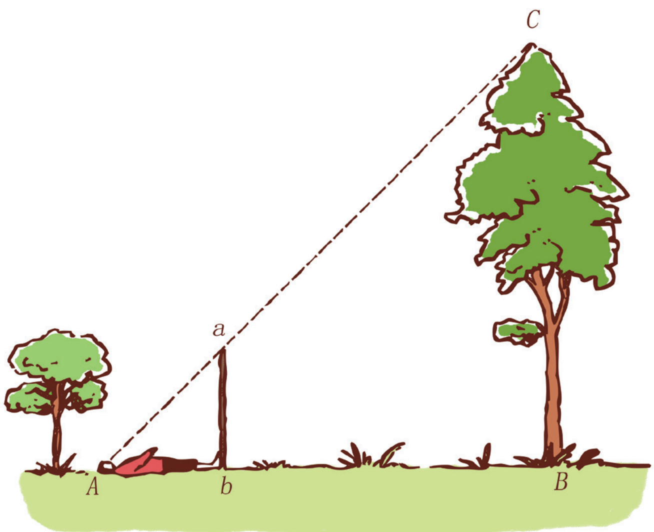


图3 | 长木杆测高法。

怎么样，这两种方法都很简单吧？你比较喜欢用哪一种呢？

凡尔纳的测高妙法

你喜欢看儒勒·凡尔纳的科幻小说吗？我可是他的忠实粉丝呢！他曾在小说《神秘岛》中教给大家一种巧妙的测高方法，我们不妨来重温一下这一段。

工程师说："我们今天得去测量一下那个眺望岗的高度。"

小哈伯特问："需要带什么工具吗？"

"什么都不用带，今天我们要使用一种既简便又准确的方法。"

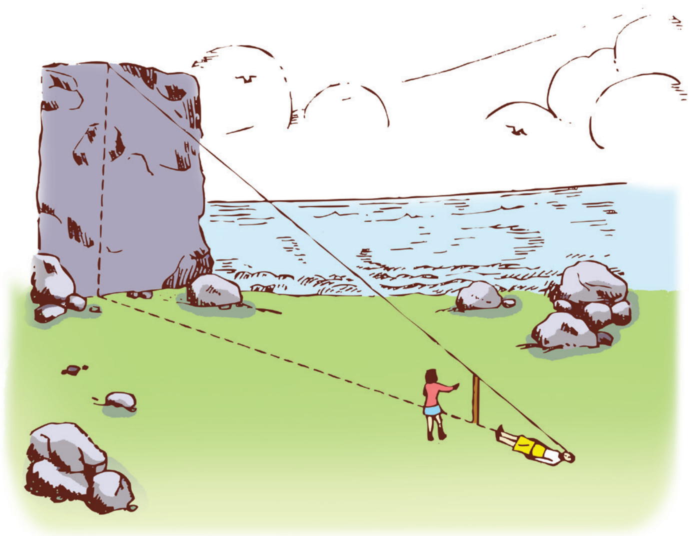
小哈伯特有些疑惑，什么工具都不带也能测量？他跟着工程师，走下花岗岩壁，往岸边走去。

测量开始前，工程师先用一根长长的直木杆与自己比对，确认一下木杆长度正好是自己的身高的两倍，对于自己6尺的身高，他是非常了解的。

小哈伯特拿着工程师用绳子和小石块做成的悬锤，跟着工程师走到大约离花岗岩壁有500尺距离的地方。工程师将木杆插入沙土大约2尺深，固定好以后，用悬锤调整木杆，使它垂直于地面。

接着，工程师在离木杆有一段距离的沙地上躺下，眼睛正好可以看到木杆顶端及峭壁边缘在同一直线上，然后在躺下的地方仔细用木橛做了一个记号（如图）。

工程师起身问小哈伯特："你了解几何学的基本常识吗？"



凡尔纳小说里的主人公在测量岩壁高度。

小哈伯特点点头，工程师接着问："那你知道相似三角形的特征吗？"

"知道，相似三角形相对应的边成比例。"

工程师满意地笑了："说得对！你观察一下，我就是在打造两个相似的三角形来帮助我们完成测量。你看，我把这根垂直的木杆作为小三角形的其中一条边，而木橛（jué）与杆脚之间的距离是另外一条边，弦则由我的视线充当。对了，我的视线还是大三角形的弦，它们两者在同一直线上。至于大三角形的另外两条边，分别是我们要测量的岩壁高度，还有从木橛到岩壁脚之间的距离。"

小哈伯特想了想，突然兴奋地大喊："哦，我懂了！木杆和岩壁的高度之比，不正是木橛分别到木杆和岩壁脚之间的距离比嘛！"

"对，就是这样！所以我们不需要直接测量岩壁的高度，只要测量出比例算式中的前面三个项，也就是你刚才说的两个距离以及木杆的高度，就可以通过计算得到我们所需要的岩壁高度，因为那正是比例算式中的第四个未知项。"

两个水平距离测量的结果分别是：小三角形的边长是 15 尺，而大三角形的边长为 500 尺。

结束测量后，工程师记录如下：

$15:500=10:x$

$500\times10=5000$

$5000\div15\approx333.3$

所以，可知岩壁高度约为 333 尺。

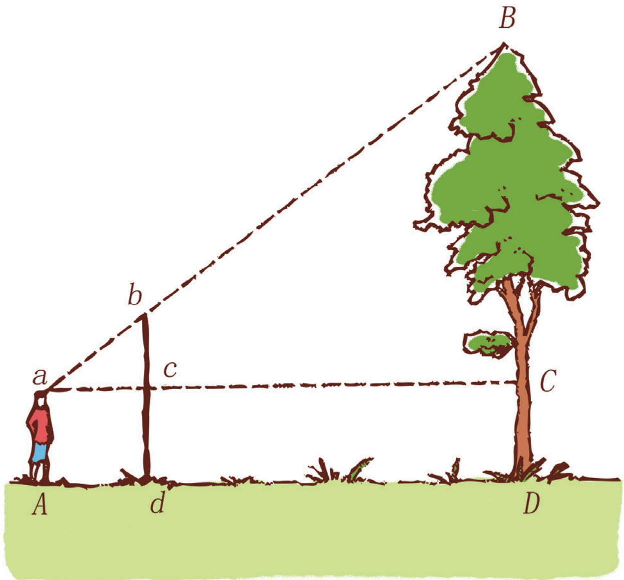
侦察兵的测高绝招

前面介绍的几种测高法有的要求人必须躺在地上，实行起来不太方便，所以我们再来学习一种不需要躺下就能测量高度的办法。

在一次战争中，一支小分队接到一个命令，必须如期在山涧上造出一座桥。可是，造桥需要大量的木材，山涧对岸已经被敌军占领，指挥中尉只好派出一个侦察小组，前往附近的一片树林测量常见树木的直径和高度，

好算出架桥所需要的树木总数。

侦察兵们借助一根测量木杆，在距离被测树木不远的地方，把比自己稍高的木杆垂直插入地里，然后面朝大树，沿着 Dd 的延长线往后退，直到当自己面朝树顶，可以看到木杆顶端 b 与树顶 B 在同一直线上时，便停在 A 点，头部不动，眼睛望向水平直线 aC 的方向，在木杆和树干的 c、C 两点做好标记（如图）。



使用测量杆测量高度。

接着，侦察兵根据相似三角形 abc 和 aBC 的对应关系，从比例式

$BC : bc = aC : ac$

计算出

$$BC = bc \times \frac{aC}{ac}$$

bc、aC 和 ac 的距离都可以直接测出，通过计算得出 BC 的值，再与可直接测量的 CD 相加，就能得到树木的高度。然后在一定面积内测出树木的密度，从而得出所需的树木数量。

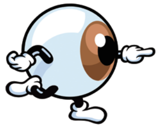
指挥官根据侦察兵调查的数据，及时确定架桥地点和方式，如期顺利地完成了架桥任务。

几　何

到河边量一量

Entertaining mathematics

拿破仑的先锋军队来到了河边，河边没有桥，能不能涉过宽阔的河面？拿破仑问身边的工程师：“告诉我，河有多宽？”工程师说：“对不起，阁下。测量仪器留在后面的部队，距离我们还有十多公里远。”“我现在就要知道，不然拿你是问！”拿破仑的语气斩钉截铁。聪明的工程师很快想出了一个法子，他脱下钢盔，让帽檐和自己的眼睛，还有河对岸的一点刚好在一条直线上。然后，小心地保持身体的直立，慢慢向后退去。等到眼睛、帽檐和河岸的相应一点刚好在一条直线上时，他停下来把自己的位置做了标记。接着，工程师再用脚量出前后两点间的距离，对拿破仑说道：“阁下，这就是河流大致的宽度。”他的方法正确吗？这一章将告诉你其中的奥秘。



怎样测量河流的宽度

如果你平时喜欢观察和实践，而且数学不错，那么你一定有办法不爬树就能测出树高，何况前面已经学习了几种测树高的办法。

所以，我敢打包票，你也一定能做到不需要横渡河流，就能轻松测量出河流的宽度。

为什么我对你如此自信呢？因为测量河流宽度使用的方法，就是运用测量无法靠近的物体的高度时用的技巧，也就是用一些可以测量的距离，来代替那些未知距离的测量。这方面的技巧有很多，我相信你一定能找到自己的办法，但我还是想传授你四种简单易行、准确度高的操作方法。

第一种方法。想学会这种方法，首先要了解直角三角形的一个特征：如果这个直角三角形的一个锐角是 30°，那么这个锐角所对的直角边的长度是斜边长度的一半。这个特征证明起来并不困难，你先看看**图 1 甲**。假设直角三角形 ABC 中的 $\angle B$ 为 30°，在这种情况下，我们以 BC 为对称轴，将三角形 ABC 翻转到与其初始位置对称的位置，构成新三角形 ABD，A、C、D 三点在同一条直线上（**如图 1 乙**）。

在三角形 ABD 中，$\angle A$ 为 60°，$\angle ABD$ 是两个 30° 角的合角，也是 60°。根据等边对等角，可以得到 $AD = BD$。又因为 $AC = \frac{1}{2}AD$，可以得出 $AC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$。只要了解直角三角形的这个特征，就可以用其进行河流宽度的测量了。

先准备一个木板，在上面设置好大头针的位置，钉成一个直角三角形，使直角边长度为斜边的一半，再将这块木板拿到 C 点处，在 AC 方向上与大头针所钉的斜边重合，如图所示（**图 2**）。

沿着三角形较短的一条直角边，

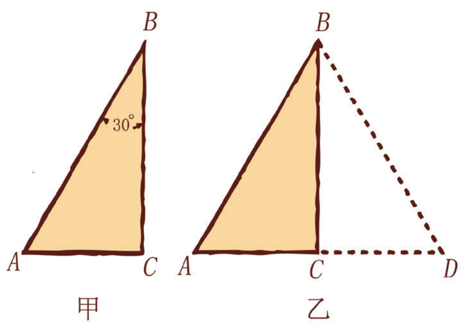


图1｜什么时候直角边是斜边的一半?

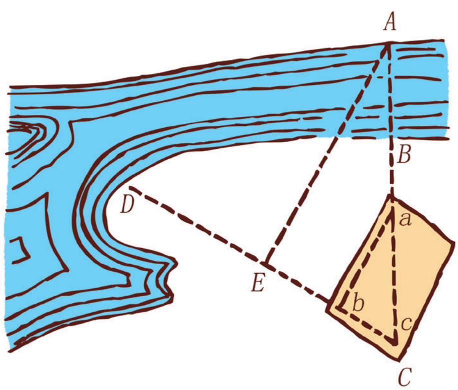


图2｜用有30° 角的直角三角形测量。

并在 CD 方向找到一个点 E，使 CD 方向和 EA 方向垂直，这时候 $\angle A$ 为 $30°$ 角。根据直角三角形的特征，得知 CE 长度是 AC 长度的 $\frac{1}{2}$，只要测出 CE 的距离，乘以 2 即可得到 AC 的长度，然后再用 AC 的长度减去 BC 的长度，就可以求出河流的宽度。

第二种方法。这种方法的主要工具是“大头针测量仪”。找三个大头针，如图所示（图 3），钉在等腰直角三角形的三个顶点上。接着我们再看下一个图（图 4），在我们不打算摆渡到河对岸的情况下，AB 是我们需要测量的河流宽度。我们在点 B 这个河岸岸边，站在点 C 旁边，将大头针测量仪放在眼前，顺着大头针的方向望去，使两枚大头针 a、b 可以将 A、B 两点完全挡住。

这时，我们就站在 AB 直线的延长线上，在保持仪器不动的情况下，b、c 两个大头针的方向与刚才的方向是垂直的。沿着这两枚大头针望去，会发现被大头针挡住的 D 点，也就是说，D 点是在与 AC 垂直的这条直线上。

将一根木桩钉在 C 点，然后沿着 CD 一直往前走，找到一个 E 点。在这里，同时可以看到 A 点被大头针 a 遮住，C 点被大头针 b 遮住，即这里是这个三角形的第三个顶点。在三角形 ACE 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$ 和 $\angle E$ 为 $\frac{1}{2}$ 的直角，所以 $AC=CE$，这时测量 CE 的距离后，就会间接知道 AC 和 BC 的距离，从而可以求出河流的宽度。

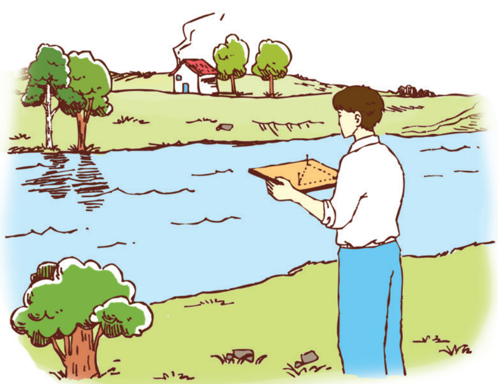


图3｜用大头针测量器测量河流宽度。

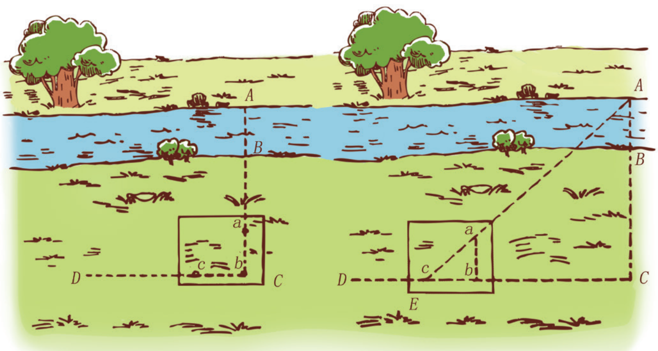


图4｜用大头针测量器测量河流宽度的解析图。

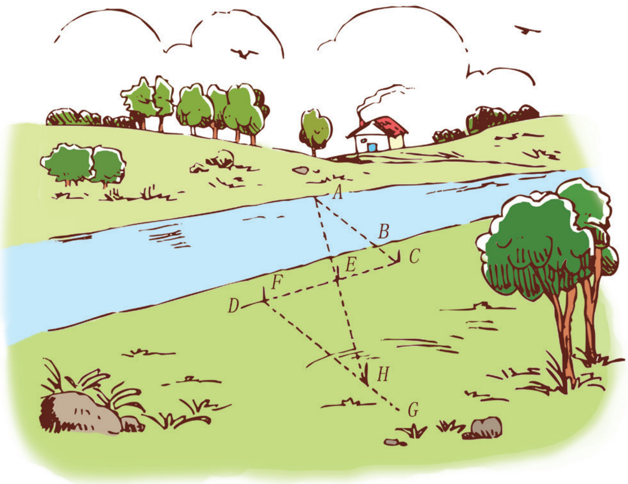


图5 | 用全等三角形测量河流宽度解析图。

需要注意的是，使用大头针测量仪的时候，要注意使它保持不动。有一个方法就是将带有仪器的木板固定在木杆上，再将木杆插进地面，固定在地上。

第三种方法。这种方法与第二种方法比较相似。如图所示（图 5），先沿着 *AB* 延长线寻找到点 *C*，借助大头针测量仪标定 *CD* 直线，使它与 *CA* 垂直。

在 *CD* 线上画出两段相等距离的线段 *CE* 和 *EF*，长度随意设定，分别在 *E* 点和 *F* 点钉一个木桩，然后拿着大头针测量仪在 *F* 点找到与 *FC* 线垂直的方向 *FG*，沿着 *FG* 的方向前进，找出一个 *H* 点，从 *H* 点望去，*A* 点正好被 *E* 点遮住，*H*、*E*、*A* 三点在同一条直线上。

至此，任务也就完成了：根据全等三角形的特点，*FH* 的长度等于 *AC* 的长度，只要从 *FH* 中减去 *BC* 就可以求出河流宽度。

使用这种方法要求场地必须得大，如果地形不允许，就只能换其他方法啦。

第四种方法。这种方法是略微改变了一下前一种方法得到的。这次我们不在 *CD* 上量取两段等长的线段，而是在 *CD* 线上量出两段不相等的线

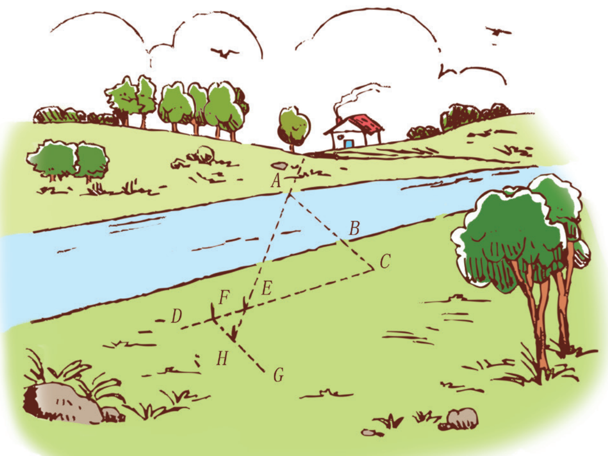


图6 | 利用相似三角形的特征来测量河流宽度。

段，其中一段是另一段的整数倍。

如图所示（图 6），所量出的 EC 是 FE 的四倍，之后的做法和前面的方法相同。在 FC 垂直的 FG 方向上找到 H 点，从 H 点望过去，A 点恰好被 E 点的木桩挡住。不过，这时的 FH 不等于 AC，而是 AC 的 $\frac{1}{4}$，所以三角形 ACE 和三角形 EFH 是相似三角形，各角相等但各边不等，因此我们得到下面的关系式：

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1$$

由此可见，用量出来的 FH 的长度乘以 4 就是 AC 的距离，然后与第三种方法一样，再减去 BC 便得到河面的宽度。这种方法明显要比前一种所需的地方小很多，所以使用起来比较方便。

聪明的班长

在一次模拟战斗中，某班长接到上级命令，要求他所在部队立即测量出需要强渡的河的大致宽度。

班长带领全班悄悄接近河边，隐蔽在河岸边的灌木丛后面，然后与一名士兵爬到河边，在那里可以清晰地看到河对岸，也就是被“敌军”占领的地盘。看来若想神不知鬼不觉地量出河的宽度，只能通过目测了。

班长想了想，低声问士兵说：“你觉得这条河能有多少米宽？”

士兵回答说：“我觉得能有 100 到 110 米宽的样子。”

怎样才能得出精确些的答案呢？班长灵机一动，决定借助自己戴的帽子的“帽檐”来测量。如图所示（图 1），使用这种方法，要求观测者将帽子戴在头上，面向河对岸，使帽子的帽檐正好在眼睛的上方，向对岸望去的时候，帽檐底边正好与对面的河岸线重合，如果没有帽子，也可以用手掌或记事本紧贴在前额来代替。然后，观测者的头要保持不动，全身向右转或向左转，甚至可以向后转，只要转到地面比较平坦、便于测量的方向即可。

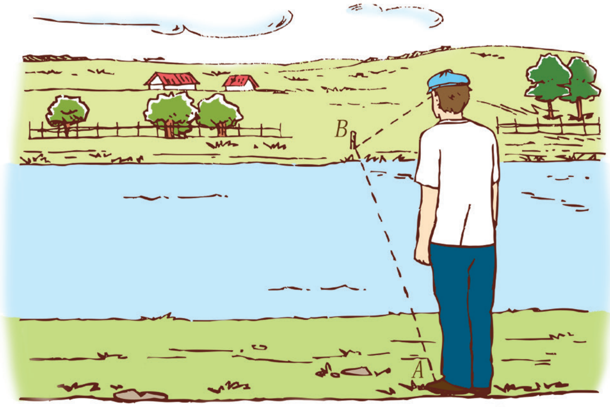


图1｜帽檐也可以用来测量河的宽度。

105 米。不得不说，士兵的目测能力真不错！

我们来用几何学解释一下“帽檐测量法”。如图所示（图 2），从帽檐投出视线，最开始将视线对着河对岸线上的某一点上，比如图中的 B 点。当观测者转身时，他的视线像圆规一样在空间画了一个圆，这时 AC 和 AB 都是这个圆的半径，所以这两条线是相等的。

找到从帽檐（手掌或记事本）下看到的最远的一个点。从观测者到这个点的距离，就是河面的大致宽度。

于是，班长迅速从灌木丛中站起来，按照上述过程望向对岸，然后快速转身，找到从帽檐下望去最远的一点，接着带领那个士兵匍匐前进，爬到那个点，用绳子测量出这段距离，结果是

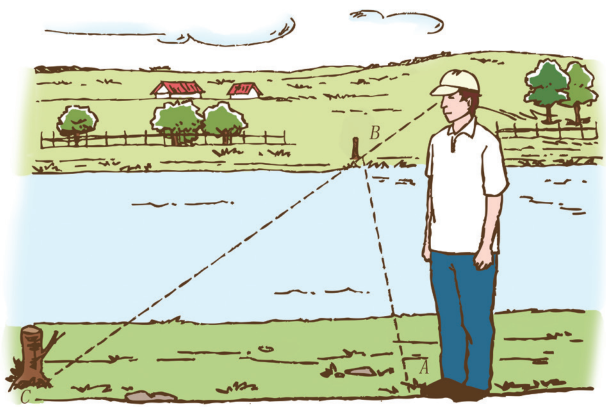


图2｜帽檐测距法解析图。

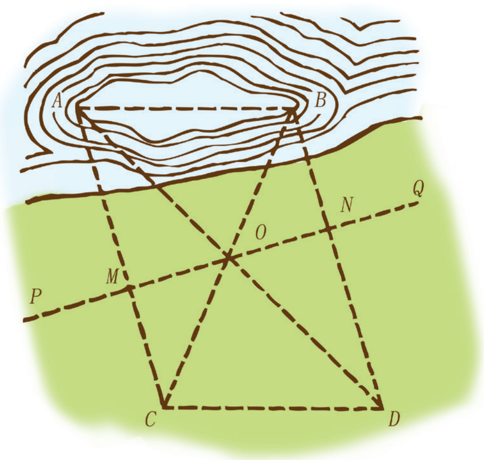
如何测出小岛的长度

假如你正站在海边，看到海中的一个小岛。在不离开岸边的前提下，你能测出小岛的长度吗？

虽然在这种情况下，我们没有办法接近被测岛屿的两端，但还是可以不费什么周折，不用什么很复杂的仪器测量出来。怎么样？你有兴趣吗？快来跟我学习一下这种方法吧！

如图所示，AB 为我们要测量的岛屿长度。我们先在岸边随意选取两个点，记为 P 和 Q，在这两点分别钉一根木桩。在 PQ 上选取 M 点和 N 点，使这两个点连接 A 和 B 两点所得的线段 AM、BN 与 PQ 方向成直角，可用大头针测量仪来进行。

在线段 MN 的中点 O 处钉一根木桩，并在 AM 延长线上找到点 C，使从点 C 望去，B 点恰好被 O 点的木桩挡住。同样，在 BN 的延长线上找到点 D，使从点 D 望去，A 点恰好被 D 点的木桩所遮挡。这样，CD 之间的距离就是被测小岛的长度。



利用全等直角三角形来测量距离。

那么，CD 真的等于小岛的长度吗？证明这个结论并不难，利用基础的几何知识就能解决。仔细观察直

奇趣数字

走向成功的“三”

中国古人认为，“三”是一个成功的数字。史记云：“数始于一，终于十，成于三。”《老子》则说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”亚里士多德说：“人类所需要的知识有三：理论、使用、鉴别。”法国生物学家巴斯德说：“立志、工作、成功是人类活力的三大要素。立志是事业之门，工作是登堂入室的旅程，旅程的尽头是成功。”法国天文学家戴布劳格林总结自己经验有三大原则：广见闻，多阅读，勤实践。法国文学家卢梭把读书分为三个步骤：储存、比较、批判。陈景润说：“学习要有三心：一是信心，二是决心，三是恒心。”郭沫若期望青年必须具有“三大基础”即思想基础、科学基础和语文基础。

角三角形 AMO 和 DNO，它们的 MO 和 NO 两条直角边相等，$\angle AOM$ 和 $\angle DON$ 也相等，可证明这两个三角形是全等三角形，因此有 $AO=DO$。同样，用类似的方法可以证明 $BO=CO$。接着，我们将三角形 ABO 和 DCO 比较，会发现它们也是全等三角形，因此很容易得出 AB 和 CD 相等。

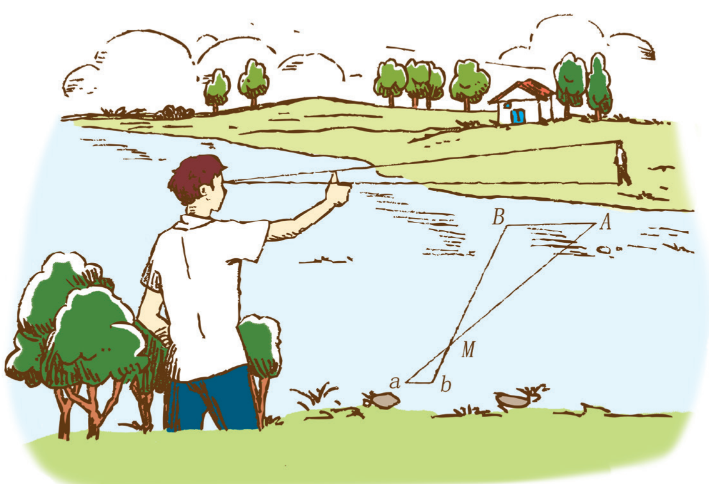
眼睛的妙用

假如河对岸有一个人正沿着岸边行走，我们在河岸这边可以清楚地看见他的步伐，如果不用任何仪器和工具，你能测出和他之间的大概距离吗？

可能你会想：“什么工具都没有，怎么测啊？”别急，我们的眼睛、手等，都可以做测量工具。

伸直你的手臂，朝向对岸正在行走的那个人，根据他的行走方向，来判断你应该闭上哪只眼睛：如果那个人朝你的右手方向行进，你就闭上左眼，用右眼向你竖起的大拇指尖望去；如果那个人朝你的左手方向行进，你就闭上右眼，用左眼向大拇指尖望去。

当那个人恰好被你的大拇指挡住的那一刻（如图），你要立刻闭上刚才观测的那只眼睛，睁开另一只眼睛，顿时你会感觉那个人好像后退了几步，此时你要记下他所走的步数，直到他第二次被你的大拇指遮住为止。至此，你已



赤手空拳也可以测量距离。

经有了测量大致距离所需要的数据了。

也许你在心里嘀咕："这点数据真的够用吗？"是的，足够用！下面，我来教你怎么利用这些数据。

我们假设你的眼睛是 a 和 b，你伸出手臂后，拇指的指尖在点 M 处，A 点则是对岸那个人的第一个位置，B 点是他的第二个位置。你面朝着他，使得 ab 的方向尽量和他走的方向平行，那么三角形 abM 和 ABM 是相似三角形，由此可得出比例式：

$$BM : bM = AB : ab$$

整理得

$$BM = AB \times \frac{bM}{ab}$$

在这个比例式中，除了 BM 是未知的，其余都是已知的。

这时你可能要打断我了："其余三个的数值也不是已知的呀？"其实，这些数值都有个大致的常量，比如两个瞳孔间的距离 ab，伸出手臂的长度 bM 和迈出每一步的距离。

在这里，我们假定你的两只眼睛瞳孔间的距离是 6 厘米，手臂与眼睛之间的距离大约是 60 厘米，行人从 A 点到 B 点一共走了 14 步，平均每步 $\frac{3}{4}$ 米，代入刚才的计算公式，就能得出你与那个人之间的距离。

$$BM = AB \times \frac{bM}{ab} = 14 \times \frac{60}{6} = 140(\text{步})$$

$$= 105(\text{米})$$

每个人瞳孔之间的距离和手臂到眼睛之间的距离基本是固定不变的，所以它们之间的比 $\frac{bM}{ab}$ 可以事先量好并记住，一般来说，比值都是 10 左右。知道这些已知条件，就能随时求出我们与不能靠近的物体间的距离。

油膜有多厚

英国物理学家波易斯在《肥皂泡》中写道："我曾在水池里做过一个实验，把一小勺橄榄油倒在水面上，想看看会发生什么。我发现橄榄油很快扩散成一个大圆斑，直径竟然有 20~30 米！这可是勺子里油滴直径的一千多倍。由此，我可以算出水面油层的厚度大约是 0.000002 毫

米，是勺子里油滴厚度的百万分之一。”

波易斯说的这种现象，也会发生在工厂排放废水的河面上，在排水管周围不远的地方，经常有一些颜色鲜艳、闪闪发光的东西，这就是工厂废水中的油性物质，比如机油，总是漂浮在水面上，逐渐变为一层薄薄的油膜扩散到四周，好像波易斯说的那样。那么，波易斯是怎样算出水面上油膜厚度的呢？

你肯定不会拿把尺子傻乎乎去量油膜的厚度，再说用尺子也量不出来。我们可以取来20克机油，倒入水中，当它们扩散开以后，测量圆斑的直径，就能求出圆斑的面积，再利用质量求出油滴的体积，进而求出油滴的厚度。下面，我们来解答一个题目，具体熟悉一下整个过程。

【题目】在水面上散开1克煤油，如果形成的圆斑直径为30厘米，每立方厘米的煤油重量为0.8克。那么，请问煤油在水面上的油膜厚度是多少？

由题意得知，1克煤油的体积也就是煤油油膜的体积，每立方厘米的煤油重量为0.8克，那么1克煤油的体积是：$\frac{1}{0.8}$ = 1.25立方厘米 = 1250立方毫米。

直径为30厘米 = 300毫米的圆，它的面积是：$3.14 \times (300 \div 2)^2 \approx 70000$平方毫米。

煤油油膜的厚度：$1250 \div 70000 = 0.018$毫米。

由此可以算出，油膜的厚度大约是1毫米的$\frac{1}{50}$，这样小的数值用普通仪器很难测量。如果是肥皂泡，还可以扩散得更薄，甚至小于0.0001毫米。

奇趣数字

好恶不同的“四”

在日语中“四”“死”发音相似，故日本人忌用“四”。难怪美国有家高尔夫球生产厂家进入日本市场后一直销售不佳，原来它每盒装4个。相反，阿拉伯人对“四”有好感，他们把四瓣形玫瑰花视为“生命之花”，用它表示长生不老。我国对“四”也颇欣赏：古有四书、四大古典名著、民间四大传说，汉字书法有四体，还有“四季发财”之说。相声演员马季花了四十分钟竟没有道完“四”。

水面波纹为什么是圆的

如果将一块石头抛向平静的水面，水面上会产生许许多多个圆圈（图 1）。我们都能解释这个现象：水面受到石头击打后，激起的波浪会以石头为圆心，以相同的速度向四周扩散，因此每一个波浪上的所有点与起浪地方的距离都相同，也就是说，它们都处在一个圆周上。

那么，如果向流动的水面扔石头，会产生什么现象呢？石头激起的波浪还会是圆形的吗？还是扭曲成别的形状，比如椭圆形？如果向湍急的水面扔石头，又会产生什么现象呢？

粗略一想，我们可能会觉得石头产生的圆形波浪会随着水流方向扩展，而且顺流的速度还会比逆流的速度快一些，所以那些波浪看起来应该是有些伸长的封闭的曲线，怎么也不可能是正圆形。

我们想当然的东西，经常会与现实大相径庭：即使是水流十分湍急的河流，将石头扔进去，激起的波浪也会是正圆形。

如图所示（图 2），圆形的波纹被河水的流动所吸引，每一个点都吸引到图上箭头标示的方向，而且所有的点移动的距离都是相等的，它们移动的速度也是一样的，且沿着相互平行的方向移动，这种移动自然不会改变图形的形状。

图1｜平静水面投入石子后产生的圆形波纹。

注意看右面的那

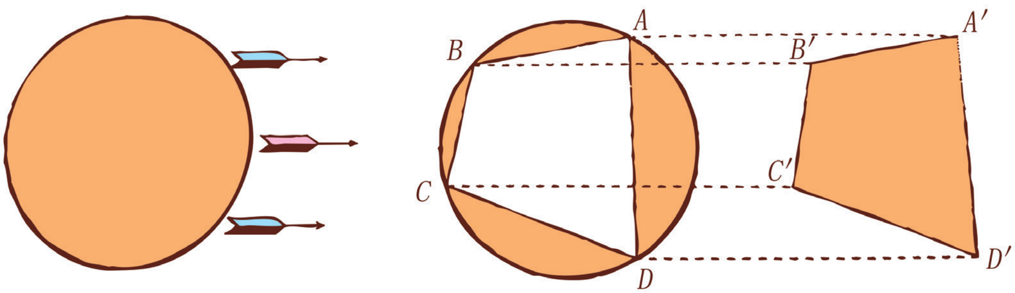


图2 | 水流与波纹形状的关系解析图。

个图，新的四边形 $A'B'C'D'$ 取代了原来的 $ABCD$，对应的点 A 到了点 A' 的位置，点 B 到了点 B' 的位置，点 C 到了点 C' 的位置，点 D 到了点 D' 的位置，所以两个四边形是完全一样的。如果我们在圆周上取更多的点，那么就会得到全等的多边形；如果我们在圆周上取无数个点，相当于取整个圆周，这样平行移动后，两个圆形是全等圆周。这也就是为什么即使水面流动，石头激起的波纹仍然是圆形的原因了。

当然，在上面的讨论中，有一个必不可少的前提，即所产生圆形波浪上的所有点与水流动的速度相同。如果将石头抛向靠近河岸这种各部分水流移动速度不同的河面，被激起的波纹就不能保持圆形了。

几　何
视觉上的奥妙

Entertaining mathematics

车水马龙的街头忽然出现了一道深渊，路人吓得赶紧绕道；地铁过道里涌过一层层蓝色水波，乘客惊得不敢落脚；明明桌上放有一只杯子，胳膊却能从整个桌面上平平滑过……究竟是怎么回事？原来全是3D全景绘画在捣鬼！

更神奇的事情还有呢！早在四百多年以前，意大利画家达·芬奇创作了一幅世界名画《蒙娜丽莎》。这幅画现在收藏在法国的卢浮宫里，站在室内的参观者无论身处哪个位置，都会觉得蒙娜丽莎的眼睛在看着自己。天啊！达·芬奇是怎么做到的？

其实，不管是3D全景绘画还是《蒙娜丽莎》，它们都是通过营造一种奇妙的视觉效果，完全颠覆了你所看到的景象。想一想在我们的生活里，还有哪些是眼睛所不能证明的真相？

怎样让盘子看起来像月亮

每逢农历十五的时候，月亮又圆又大，那么，满月究竟有多大呢？想要回答这个问题，需要对物体所谓的“视大小”有清楚的

了解，也就是由被观测物体边缘引向我们眼睛的两条直线间的角度大小，称为“视角”或“物体的角度尺寸”。

正因为视角的存在，同一物体我们在不同距离会看到不同的大小，所以有人说满月的大小像苹果，有人说像盘子，有人说像小饼……之所以有这么多种答案，是因为人们对满月尺寸进行估计时，所处角度正好和这些物体被看到的角度一样。当然，有时也有距离的原因，距离近视角大，距离远视角小，因此必须指明从多远的距离观察苹果或盘子，才能做出明确说明（图 1）。

将远处物体的大小，与一些不指明距离的物体的大小进行比较，是我们很多人的心理习惯，也容易给别人留下一定的感官印象，但却产生不了清晰的形象。比如站在山顶，看远处汽车的大小像铁罐一样。在莎士比亚的《李尔王》中有这样一段，描写了站在海边峭壁上的人从上往下看时看到的景色。

眼睛朝下面望去，看得我有些头晕目眩！那只盘旋在半空中的乌鸦，看上去还没有甲虫大；山腰有个背竹筐采草药的人，看上去还没有我的脑袋大；海滩上忙碌的渔夫像小老鼠那么大，停靠在海岸边的高大的帆船如划艇一般，而它的划艇小得像一个浮标，不仔细看几乎发现不了！

这段文字里的比喻，说明了比较物体甲虫、脑袋、小老鼠与眼睛的距离，这些比喻能给人以清晰的距离概念。所以，当我们将月亮的大小与盘子、苹果等作比较时，必须说明这些日常物品距离眼睛有多远。

实际上，这个距离要比你所想象的大很多。如果拿起一个苹果并向前伸直手臂，你会发现不仅整个月亮被挡住，甚至连一部分天空都被遮住了。你

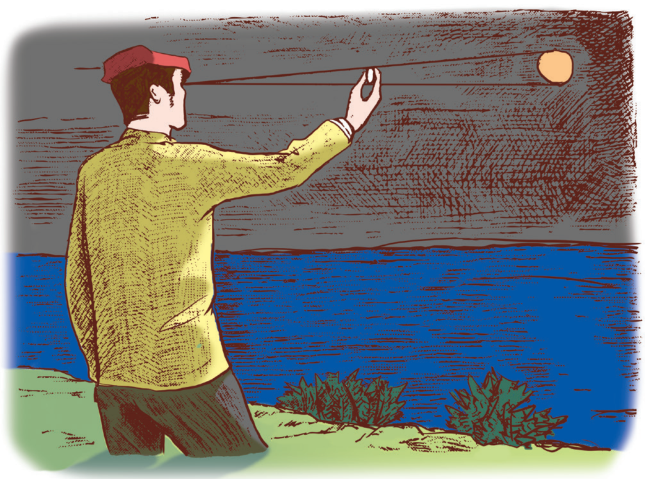


图1 | 视角不同，同一物体在不同距离下大小也不同。

还可以试着在月光下，把苹果用一根绳吊起来，然后慢慢后退，直到这个苹果恰好遮住整个月亮，那么，在这个位置上，对于你来说，苹果和月亮所具有的视大小是一样的。这时，你不妨测一下自己的眼睛和苹果之间的距离，这个测量结果大约是 10 米。我想你肯定觉得很意外，为了造成苹果和月亮大小一样的真实感觉，竟然需要把它移到离自己眼睛那么远的地方！如果把苹果换成盘子，那距离就更远了，得把盘子移到离眼睛 30 米远的地方！

如果你没有试过，肯定会觉得上面那些说法不大可信，但事实就是如此，原因就在于我们在观察月亮时的视角只有半度。在平时的生活中，我们大多数人几乎都不需要估算角度，对 1°、2° 等这些小角度的概念十分模糊。我们只会估计那些比较大的角度，特别是将它们与钟表时针与分针之间的角度作比较，比如我们在钟表面上找到 90°、60°、30°、120°、150° 这些角度，它们相对应的时间分别是 3 点、2 点、1 点、4 点、5 点，我们甚至不用看数字，就能根据时针和分针的位置和角度来确定时间，但对于那些微小的物体，我们通常是在极小的视角下看见，因此我们完全无法估计出它们的视角，即使是近似值。

那么，如果有一个直径为 25 厘米的盘子，把它放在多远的地方，才能让盘子看起来像月亮一样大呢？如果

奇趣数字

吉祥与魔鬼数字“六”

从秦始皇时代起，就确定了六的吉祥之意，他把六渗透到许多政策法令中。他将全国统一后定为六郡，在咸阳建 270 座宫殿（六的倍数），皇车用六匹马拉。我国古代的“六诏”后裔（yì）——白族人，现仍保持着崇六的礼俗：妇女生了小孩，娘家必须送粮六斤或几斤六两，鸡蛋几十又六个。而在日本赠送礼品却忌用六，三个“六”字连写是魔鬼的代号。美国前任总统里根在卸任前，打算移居莱尔市的克劳德大街，当他知道自己未来的别墅牌号是“666”时，大惊失色，急忙动用总统权力命令该市政府将寓所号码改动。

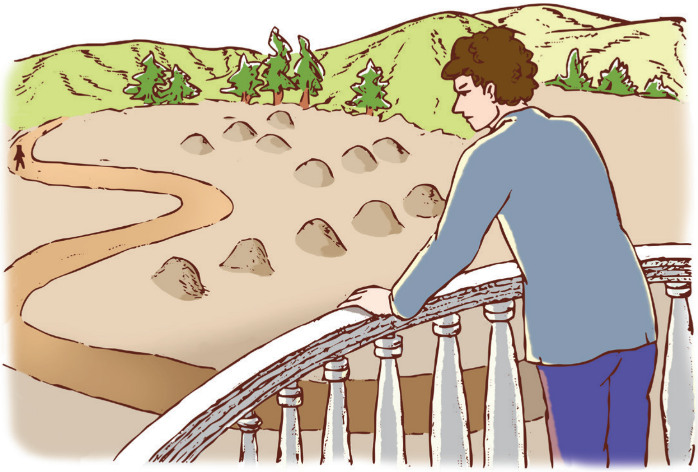


图2｜看前方的人的角度不同，代表这个人离你的远近也不同。

就要在2°的视角下（图2）。

同样，我们可以计算出1米长的标杆在1°视角下离我们的距离，重复上面的计算过程，也就是：

$$360 \div \frac{44}{7} \approx 57（米）$$

如果是1厘米长的标杆，距离大约是

我们想计算一个圆的半径，对于小角度来说，弧长和弦长基本上没有差别。比如圆的1°角，对应的圆弧长度为1.7米，那么圆的整个周长的长度就是1.7米×360≈610米。

根据公式，我们知道半径是周长的2π分之一，如果以$\frac{22}{7}$作为π值，那么半径就是：

$$610 \div \frac{44}{7} \approx 98（米）$$

因此，如果我们看一个人的视角是1°，那么他就要离我们大概100米远。假如这个人再走远一些，走到200米之外，那么我们只能在$(\frac{1}{2})°$的视角下看到他；如果走开50米，那

57厘米；如果是1千米的物体，距离大约是57千米。总之，一切物体处在相当于它的直径的57倍的距离看去时，视角都是1°。举例说明：如果有一个直径为9厘米的苹果，你想在视角为1°的情况下看到它，那么应该把苹果放在多远的地方呢？解答这道题很简单，只需要一步（9×57≈510厘米），即可解出。

综上所述，我们看月亮的视角大约为$(\frac{1}{2})°$，因此我们很快可以算出一个直径为25厘米的盘子，把它放在距离0.25×57×2=28.5米远的地方，看起来与天上的月亮一样大。

我们拿苹果或盘子和月亮作比较

时，都是假定将它们放在离我们很远的地方，其实，在视大小相同的情况下，最适合用来和月亮大小进行对比的物体，是一枚小小的豆子，甚至是火柴头。不信的话，你可以握着一支铅笔，对准天上的满月伸直手臂，你会惊讶地发现，月亮完全被铅笔尖遮住了！

由于月亮的亮度产生的错觉，月亮表面在很多人看来会比实际增大 9 到 19 倍，所以连一些眼光精准犀利的画家也会受到错觉的欺骗，经常把月亮画得比应有的尺寸大很多。

视角在电影特技中的应用

有些时候，物体所在位置的远近，会给我们造成很大的视觉误判，将它们应用在电影中时，却能表现出很多神奇的效果。

比如在电影《鲁斯兰与柳德米拉》里面，有这样一个画面（图 1）：骑在马上的非常渺小的鲁斯兰和一个巨大无比的人头。这种利用位置远近和角度错位产生的视觉效果令人感到无比震撼。

有个摄影记者非常喜欢利用角度错位的方法，拍出以假乱真的照片博人眼球。有一次，他拍了一张介绍山岩裂缝的照片，画面上的裂缝大得出奇，成为一个宽阔的地洞入口。有些冒险家信以为真，结伴前往地洞冒险，结果发现那张照片是在墙面上的一道

图1 电影中利用前后错位的手法造成令人惊奇的视觉效果。


图2｜电影中火车相撞的情景经常是这样拍成的。

细缝前拍摄的。还有一次，这个记者又拍了一张照片，说城市街道上堆积了很大的雪山，堵塞了交通。其实呢，他只是贴近一个小雪堆，将视角变大，达到了特殊的效果。

上面所述，都是为了解释视角这个概念。电影中有时会出现列车相撞的惊险镜头，或者汽车在海底行驶的奇特画面。你也许会觉得这样的画面太不可思议了，看了下面几幅图，你就会知道这不过是电影制作中一些常见的手法。

电影中的火车事故很多是用特制的微缩火车在人工搭制的布景下拍成的（图2）。

将玩具小汽车放在一个大玻璃水箱的后面，用一根线牵引小汽车，就能达到电影中在水下开车的效果了（图3）。

可是，为什么在看电影的时候，我们感觉不到那些画面是如此布局的呢？因为它们是在非常近的距离下拍摄的，而且我们无法将这些物体和其他物体的尺寸做对比，如果有所比较，一定能看出这些物体缩小了很多。

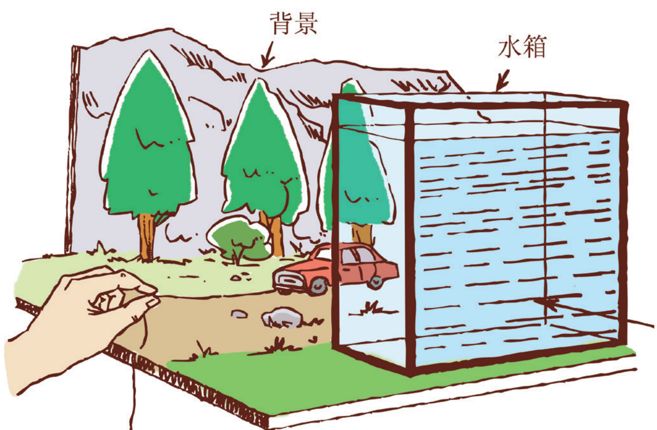


图3｜揭秘汽车在水中行驶的电影魔术。

藏在身上的测角仪

我非常喜欢向大家介绍一些简单易行的办法来解释生活中的科学，这一小节，我要介绍一种藏在身上的测角仪，换句话说，就是不借助仪器，只用自己的身体当活体测角仪。估计你会好奇地问："是用身体的哪个部位呢？"那就是我们的手指，利用手指简单估算出视角角度，然后通过测量和计算很快能得到答案。

如果能熟练使用这种测角仪，你就可以随时随地用自己的手或脚进行角度和距离的测量，尤其在空旷地带郊游时，你的测量技能会大显身手。

想要学会使用身体测角仪，首先应该弄清楚，食指指甲在向前伸出手臂时构成的视角是多少。一般情况下，成人的指甲宽度约为1厘米，手臂伸直时，指甲与眼睛间的距离约为60厘米。根据前面的学习，我们知道1°视角的距离为57厘米，我们看到指甲时的视角略小于1°，大约可以计为1°。

凡是伸直手臂后能够用食指指甲遮住的远处物体，视角都是1°，离你的距离就是它本身宽度的57倍；如果只遮住一半的物体，视角就是2°，离你的距离就是它本身宽度的28倍。如果我们遮住满月时只需半个指甲，那么看满月的视角角度就是（$\frac{1}{2}$）°，月亮距离我们的距离是它直径的114倍。知道这些基本数值，一些测量我们用手指即可完成，是不是很神奇？

如果我们需要测量的角度比较大，也可以使用大拇指指尖的一节，弯曲后与下一节成直角，然后伸直手臂即可。成人拇指这一节的长度大约是3.5厘米，注意我说的是长度而不是宽度，伸直手臂时弯曲拇指与眼睛之间的距离约为55厘米，这样可以算出视角约为4°，计算过程如下：

半径为55厘米的圆的周长为：$2\pi \times 55$ 厘米。

约3.5厘米的弧长在圆周中占的比例为：$\frac{3.5}{2\pi \times 55} \times 360^\circ \approx 4^\circ$

用弯曲的大拇指可以测出4°的视角，当然也可以测出一些大角度，

只要是 4° 视角的倍数就可以。比如远处驶过一节火车，你看到后伸直一只手臂，弯曲大拇指。如果弯曲大拇指第一节的一半遮住整节车厢，那么这时候看车厢的视角大约为 2°。如果火车的长度约为 6 米，根据上面提到的，当视角为 1° 时，物体离我们的距离是它本身宽度的 57 倍，那么就能算出车厢离我们的距离为 $6\times\frac{57}{2}\approx170$ 米。

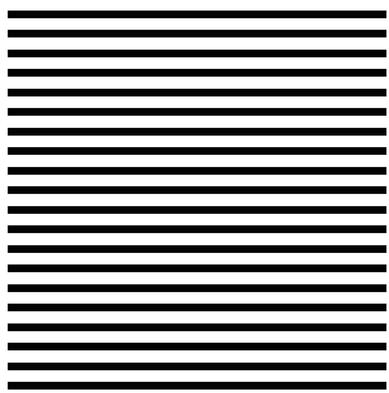
除此之外，还有两个角度值在测量时会经常用到：第一个是伸直手臂后，尽可能将食指和中指分开，这两个手指之间的角度约为 7°~8°；第二个是伸直手臂后，尽可能将大拇指和食指分开，这两个手指之间的角度约为 15°~16°。记住这些数值，说不定将来的某天能带给你一些惊喜，因为生活中数学无处不在。

测测视觉敏锐度

你的视力怎么样？测一下视力表马上就能知道结果。那么，你的视觉敏锐度怎么样？能测得出来吗？一个简单的方法，可以帮你解答这个问题。

在一张白纸上画出 20 条黑线，每一条长度都是 5 厘米，宽度都是 1 毫米，黑线之间的间隔相等，使全部线条的总宽度与长度相等，组成一个正方形。（如图）

把画好的图纸贴在光线充足的白墙上，然后面对图纸渐渐后退，直到无法逐一辨别出每一条线条，只看到一片模糊不清的灰色背景为止。这



视觉敏锐度测试图。

时，量出你与图纸间的距离，并按照前面几节介绍的知识，计算出你无法辨认 1 毫米线条时的视角值。如果这个角度等于 1′（1° = 60′），说明你有正

常的视觉敏锐度；如果等于 $3'$，那么你的视觉敏锐度只有正常值的 $\frac{1}{3}$，依此类推。

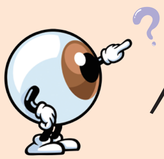
【题目】如果你在两米以外的距离观测上面图上的线条，发现线条模糊一片，那么是你的眼睛出问题了吗?

从前面所学的知识，我们知道想看到 1 毫米宽的线条时，视角为 $1°$，必须站在距离 57 毫米的地方。如果把这个距离放大到 2000 毫米之外，再看这个 1 毫米的线条，将视角设为 x，可以列出下面的比例式：

$$x : 60 = 57 : 2000$$

$$x \approx 1.7'$$

也就是说，你视觉的敏锐度只有 1∶1.7，这个比的值约等于 0.6，低于正常数值，所以你看不清楚也是正常的。



人的视力极限是多少

著名作家契诃夫在中篇小说《草原》中，描写了一位具有特异功能的“千里眼”：

瓦夏的眼睛比一般人敏锐很多，他能看到很远的地方，那些看似荒凉的土地和草原，在他的眼中却充满生机。他只要看向远方的草原，不仅可以看到草，还可以看到隐藏在草丛之间的动物们，如狐狸、野兔这些躲着人的动物，都逃不过他的眼睛。

如果说他能看到奔跑的野兔和飞翔的大野雁，你会觉得没什么了不起，那么当你知道瓦夏能看到如人类家庭生活着的动物，比如正在嬉戏的小狐狸们、正在用爪子洗脸的野兔、正在互相啄羽毛的大野雁、马上要钻出蛋壳的小野雁等这些情景时，你肯定会认为他是一个十分了不起的人。

他每天看到的世界比我们大家看到的要精彩美丽得多，而且是他独享的美妙世界，我们却无法嫉妒他，也无法分享他观赏时的愉悦和快乐。

小说中的瓦夏为什么有如此敏锐的视觉呢？在上一节中我们了解到，如果在小于 $1'$ 的视角角度下，即使是正常的眼睛，也会看不清那些横纹线

条，以及无法辨认任何被观察的对象，那些物体都会变成一个模糊的点，无法看清它们的大小和形状。

空气里尘埃的形状之所以不能被我们辨别，就是因为在太阳光的照射下，原本各式各样的尘埃在我们的眼中只会变成一个个微小的点，而且形状一模一样。

同理，我们无法看到昆虫的细微结构也是因为视角角度小于 1′。同样的例子有很多，比如用肉眼观察天空中的天体，不借助天文望远镜，我们只能想象月亮或其他行星上面的情况。

科学家们发明的显微镜和望远镜都有魔术般的作用，改变了被观测物体的光线路径，使光线以较大角度进入到人眼范围内，放大了物体的视角。假设显微镜和放大镜能放大一百倍，也就是说，我们能以普通人眼 100 倍的视角去观察物体，看到在我们平时用肉眼看不到的微小物体。

假如我们看到一轮满月的视角为 30′，月球的直径为 3500 千米，那么月球上每一个 $\frac{3500}{30}$，也就是约 120 千米长的地段，在人的眼睛里将变成一个依稀可辨的黑点。如果我们使用放大 100 倍的望远镜观察月亮，那么月

奇趣数字

最神秘的数字“七”

玛雅人认为他们的祖先是七十山沟里的七个神仙。藏族人一向认为人类的启蒙者来自天上七颗行星上的七位国王。基督教认为，天堂分为七层。佛教认为，万物皆七种原（地、水、火、风，空、识、根）生成。伊斯兰教的穆斯林们偏爱“七”：他们每隔七天举行一次聚礼，朝觐仪式也多用七或七的倍数来进行，甚至有些伊斯兰教建筑也爱用七这个数，如麦加清真寺的尖塔，不多不少正好七个。北京中国伊斯兰经学院正门的台阶是七级，礼堂前的拱门是七个，礼拜殿的南北窗户各为七扇。但巴比伦人认为“七”像咒语一样可怕，他们以七日为单位，把一个月分为四周，避免每月的 7、14、21 和 27 日处理重要事务，他们将世界划分成七个区域，认为宇宙有统治七个区域的七个神和七个恶魔。

球表面无法被看清的地段会变为 $\frac{120}{100}=1.2$ 千米；如果再换一个放大倍数为1000倍的望远镜，那么月球表面无法被看清的地段会变为120米。这么小的直径，如果月球上有工厂或其他建筑物，我们用现代望远镜就可能观测到它们的形态。

对于普通人来说，1′是视觉敏锐程度的极限。如果我们的视角能够变得更大一些，把视觉敏锐的极限由原本的1′减少到 $(\frac{1}{2})'$，看到的世界就可能像瓦夏一样精彩神奇！

下面，我们来做一道题目，加深一下对视角问题的理解。

【题目】如果借助一台可以放大三倍的望远镜，一个正常视力的人能不能看到一个在10千米以外骑马的人（骑马的人大概高2.2米）？

前面提到过，在1°视角下，物体离我们的距离是它自身宽度的57倍，人的视力极限为1′，且 $1°=60'$。那么，对于一个普通人来说，用正常视力看骑马人的轮廓应该会在 $2.2\times57\times60=7524$ 米≈7千米的距离外变成一个点。如果用放大三倍的望远镜观察，这个距离会变得远一些，大概在 $7\times3=21$ 千米以外，所以用这个望远镜完全可以清晰辨认10千米以外骑马的人。

从上面的题目可以知道，我们视力的极限是1′，所有与我们距离达到自身直径 $57\times60\approx3400$ 倍的物体，我们都看不清它们的轮廓，只能看到一个小点。假如有个人说他在距离你250米的地方看清你的面孔，那他一定是骗你的，因为即使他的视力再好，两眼之间的距离为3厘米，你的眼睛在 3×3400 厘米≈100米的距离时就已经模糊成一个点，他怎么可能看清距离他250米的你呢？

“忽大忽小”的月亮

即使你很粗心，也会发现一轮满月高挂在天空的时候，要比它在地平线上的时候小得多。太阳也有同样的情况：刚升起的太阳或

快落山的太阳，比中午高挂空中的时候大很多。不过，当高挂空中的太阳没有云层遮掩时，千万别直接用眼睛去观察，刺眼的光线会损伤视力。

可是，当我们观察星星的时候，发现它在接近地平线时，星星之间的距离看起来好像变大了，而且刚升起来或落下去的时候，感觉星星并不是离我们更近，而是离得更远了。

如图所示（**图 1**），观察头顶上的星体在 *A* 点这个位置，观察地平线附近的星体在 *B* 点或 *D* 点的位置。这也是为什么冬天观察低垂在地平线上和高挂在空中的猎户星座，会惊奇于星座在两个位置上大小的巨大差异了，夏季的天鹅座也是如此。

那么，为什么在地平线附近的太阳、月亮、星座都会变大呢？实际上，这只是我们的一个错觉，无论是低垂在地平线上还是悬挂在空中的月亮表面，它们的视角全都是 $(\frac{1}{2})°$；无论星座处于地平线上还是位于天空，星星之间的角距离都不会发生变化，所谓的“变大”，只不过是一种光学错觉而已。

天穹在我们眼中是一个截球体，由于眼睛在一个普通的位置上，能够看到的所有水平方向上的距离都大于垂直方向的距离，也就是我们看到的这个球体的高度要比半径小一半或三分之二，所以不是标准的半球面，因此我们用直线目光观察到的物体是有限的，很多其他方向上的物体都需要我们把目光抬高或放低才能看到。也就是说，我们躺在大草原上看月亮，要比在地平线上时“大”很多！

那么，我们眼睛观察的方向会使物体看起来的尺寸发生变化吗？**图 2** 就对扁圆而不是浑圆的天穹的视野作

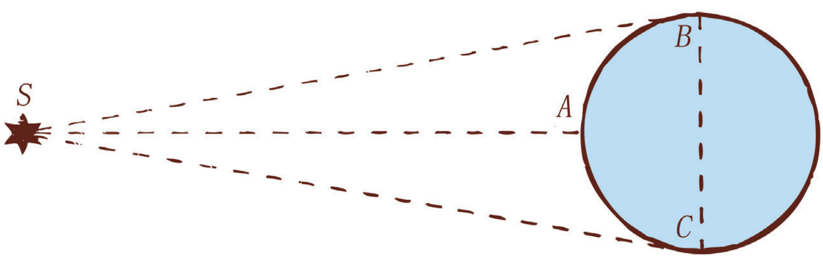


图1 ｜ 太阳在地平线与高挂天空时离观察点远近解析图。

了解析，对不同的位置看到的天体大小一目了然，无论是高挂在天空高度

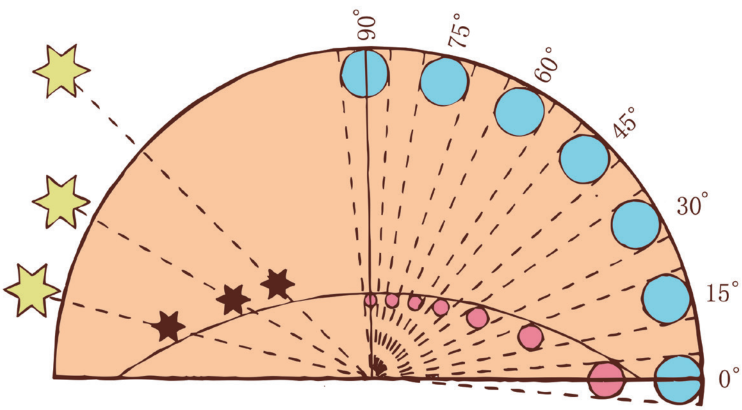
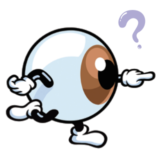


图2｜扁圆的天穹对星体的视觉大小也有影响。

为 90°，还是在地平线高度为 0°，我们在 $(\frac{1}{2})°$ 的视角下都可以看到天空上的月亮表面。但我们并不认为月亮和我们的距离是相同的，因为月亮移动的时候，我们会觉得它离我们更近一些，因而觉得大小有变化。从图中我们看到，同一角度中，离中心点比较近的地方，可以容下的圆要比离中心点远的地方小。图左边表明随着星星不断靠近地平线，它和中心点的距离好像变长了，所以本来相同的角距看起来也就不一样了。

当你在欣赏地平线上那轮巨大的明月时，你有没有发现月亮表面存在斑点或条纹呢？通过观察，你会发现不管月亮在地平线上还是高挂空中，你都看不到月亮上的任何痕迹。为什么看上去大了好多倍的月亮，却看不到细微的地方呢？这是因为这种放大并不是望远镜的那种放大，只是视觉上产生的错误，仅仅是看似“变大”而已。



月球的影子有多长

月球在宇宙空间有一个圆锥形的阴影，一直跟随着它。如果我们站在这个圆锥形阴影末端上的一点，也就是圆锥形的顶点，从那儿望向月亮，会看到什么呢？可能答案出乎你的意料，我们只能看到一个

黑乎乎的圆盘，因为太阳所有的光线都被月球遮住了。

前面我们曾推算过，观测者如果在半度视角下能看到物体，他与物体的距离是物体直径的 114 倍，也就是说，月亮圆锥形的阴影顶端与月球的距离是月球直径的 114 倍，由此我们能算出阴影长度：

$3500 \times 114 \approx 400000$（千米）

可见，这个距离比地球到月球的距离还要长，正是这个原因，才会发生日全食的现象。

那么，如果想知道地球在宇宙空间中的阴影长度，该怎么计算呢？假设阴影的圆锥顶端角也是半度，那么只要我们知道地球直径比月球直径长多少倍，其阴影长度也就对应比月球阴影长度长多少倍，即地球阴影长等于月球阴影长的 4 倍。

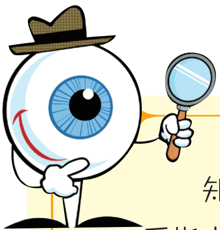
当然，这个方法也适用于计算小物体的空间阴影，比如计算飘浮在离地面 50 千米高的空中直径为 36 米、充满气体的热气球的圆锥形影子时。因为气球的球体直径为 36 米，它的影子在顶端角为半度时的长度为：

$36 \times 114 \approx 4100$（米）$\approx 4$（千米）

几　何

无处不在的几何学

Entertaining mathematics



知道自己的身高吧？告诉你个秘密：平伸双臂，从左手指尖到右手指尖的距离会大致等同于你的身高——这一招对大多数人可准确了，不信你就去量一量。还有许多其他测量方法，比如在繁星满天的夜里，在波涛汹涌的海上，在一望无垠的草原，或者是连绵起伏的沙漠，即便你没带一件测量仪，也可以计算出某些事物的长度，甚至还能测量出某个地点的经纬度呢。在著名科幻小说《神秘岛》里，史密斯先生就用一个巧妙的方法确定了荒岛的准确方位！

用步伐和眼睛测量距离

虽然在日常生活中使用的机会不多，但了解一些数据和方法，总能在你意想不到的时候帮上大忙，比如你步伐的长度，你匀速行走时的速度，如何用眼睛测量距离等。

在小路上量出 100 米的距离，然

后用均匀的步伐走完这100米，数数一共用了多少步，计算出自己平均一步大概能走多少厘米。我们学生长得很快，这个数值随着你的成长，在一年之间可能会发生改变，所以要经常测量。

根据我们无数次的测验数据，得到一个很有趣的比例：一个普通成年人的步伐长度大约是他眼睛离地面高度的一半。比如一个人的眼睛离地面的距离是140厘米，他的步伐长度就是70厘米。若不相信，你可以自己验证一下。

除了脚步的长度，我们还可以了解一下自己走路的速度，即每小时走几千米。这个比较简单，用路程除以时间就能轻松得到结果。

知道自己步伐的长度，便可以使用步测的方法测量距离近的路程，距离远的可以利用自己步行的速度来测量。那么，如果不用这两种方法，只用眼睛来测量距离，又该进行什么样的训练呢？

这种目测距离的能力与视觉敏锐度没有太大的关系。小学的时候，同学们经常在夏天去城外郊游，在游玩的路途中，我们经常进行目测练习，还把这种特殊的训练运动当作一场比赛。我们组里有一个眼睛近视的男孩儿，他目测距离的能力很强，经常在比赛中获胜；相反，有一个视力特别好的男孩儿，他没有领悟目测方法的精髓，以至于总是学不会。

还记得每次我们一走上大路，就开始盯着路边的大树或远处某个物体，然后开始比赛。一个同学会问大家：“我们到远处那棵树要走多少步呢？”其他人估算后，分别说出自己估算的步数，接着我们一同走过去数数究竟需要多少步，谁说的步数最接近实际结果，谁就能得到一分。下一轮比赛由得分者指定距离，继续进行目测比赛，直到十轮结束，谁得到的分数最高，谁就是最终胜利者。

第一次进行目测练习的时候，我们每次的估算都很离谱，有时候会相差很远。不过这种情况没有持续多久，大家渐渐都掌握了技巧，错误也越来越少。但是，在环境发生变化的时候，比如从茂密的树丛中来到田野上，或来到灌木丛茂盛的空地上，或去尘土飞扬的街道上，都会出现一些偏差。尤其晚上月色朦胧的时候，偏差就更大了。

后来，由于不断地练习，无论环

境多么恶劣，我们都能很精确地目测，误差几乎可以忽略不计。这倒使我们失去了对这项比赛的兴趣，可见挑战是培养兴趣的关键之一。

我读大学的时候，开始和朋友们进行目测树高的练习。目测练习随时可以进行，如果你闲着没事走在大街上，也可以用目测练习打发时间，比如试着目测离自己最远的商店需要多少步，到前面的电线杆有多少步等等。

在部队，对军人的目测距离能力要求很高，尤其是侦察兵、炮兵以及狙击手，都需要具备很好的目测能力，才能出色地完成任务。我从炮兵教程中引用了一段话，让大家体会一下他们在目测实践中用到的方法：

想要看清军服的颜色，需要在约 500 步的距离内；分辨人的动作大概需要 400 步以内的距离；如果想看到军装上的纽扣或饰物，需要约 200 步以内的距离；在 100 步以内的距离，看人的眼睛像一个黑点，在 50 步的距离内，才能彻底看清人的眼睛和嘴巴。

奇趣数字

吉祥幸运的“八”

佛教视“八”为一个神圣的数字。有的学者认为，八卦在远古时代可能是八个官职的名称，那时可能有一种巫术舞蹈，八个人为一组，两组人不断交换位置，从而演出八八六十四卦。

由于“八”与“发”谐音，八是吉祥的数字，所以神州处处的风景名胜便与“八”结下了不解之缘。

首都北京有“燕京八景”；古都西安有“关中八景”；芙蓉水乡有“潇湘八景”；南国花城有“羊城八景”；安徽有“芜湖八景”；甘肃有“天水八景”；四川有“十都八景”；广西有“桂林八景”；湖北有“当阳八景”；上海有“沪上八景”；浙江有“普陀八景”和“严陵八景”；河南有“洛阳八景”和“开封八景”；厦门有“大八景和小八景”；台湾有“新竹八景”。真可谓“神州处处有八景”。

港澳台地区的人们视“八”为吉祥数。这是由于广东话中“八”的音即是“发”的音。因此，人们往往爱选择有“八”的数字。又因为横写的“8”字为无限大，意味着事业的成功、生活的幸福和爱情的美满。

在 100 ~ 200 步之外，如果看到的物体越来越小，则可以根据物体的清晰程度来判断目测物体和观测者之间的距离。但是，要注意以下情况：所有受到良好光线照射或颜色比附近地形或水面鲜明的物体、位置比其他物体高的物体，以及成群状态的物体、比较突出的物体，看起来都会比实际上大一些。

即使有了上面的经验和长时间的练习，目测的误差还是会在 10% 左右，发生误差的情形一般出现在特殊的环境下，比如河流、湖泊、一望无际的平原、茂密的森林或田野，身处这些地方时，我们看东西会觉得小一些，甚至有时目测的误差能达到一倍多。

有的时候，一些物体被其他东西，比如土丘、路基、建筑物等高台遮挡，我们会想当然地认为目测物体不是在那些高台的后面，而是在它们的上面，因此难免出现误差。下面的两幅图就是目测出现错误时的情况（图 1,图 2），看来有时候目测法也不是完全靠得住。

除了步伐和眼睛，我们的身体还拥有一把“活着的尺”。一位成年男人的大拇指和小拇指分开后，两个指尖之间的距离大约是 18 厘米，女人和小孩的数值会少一些，一般到 25 岁就是固定值了；还可以记住食指的长度，我们可以从自己的中指或拇指的指根

图1 | 丘陵后的一棵树，看起来很近。

图2 | 翻过丘陵，发现树还是很远。

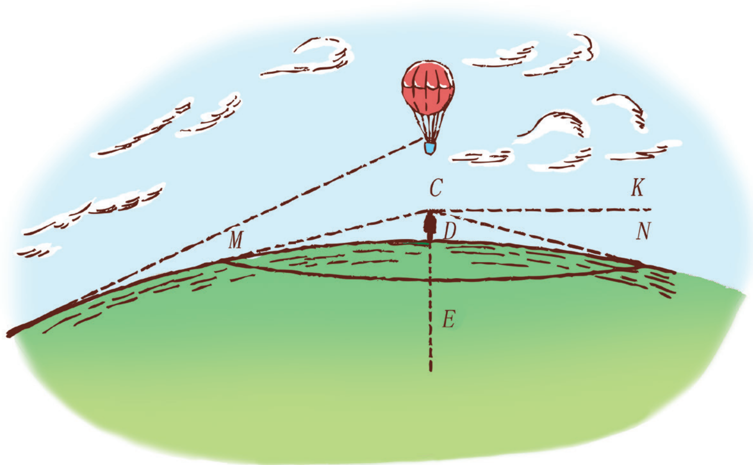
量起；食指和中指的指尖分开的最大距离大概为 10 厘米左右，手指并拢后，中间三根手指的宽度大约为 5 厘米。

天才画家达·芬奇曾经发现一个规律：大多数人张开左右两臂后，两手手指尖的距离正好是他的身高。有了这些自身携带的常用数据，无论我们走到哪里，都不愁没有测量“工具”啦。

会升高的地平线

如果你站在一望无际的草原或者田野上，会有一种自己站在圆中心的感觉，你看到的大圆边就是地平线。地平线是一个感觉很缥缈的东西，你向它靠近，它就会远离你，虽然永远无法靠近它，但它却无比真实地存在，既不是错觉，也不是幻想。

虽然对于每一个观察者来说，看到的地平线的远近都不一样，但这个界线是可以计算出来的。如图所示，这是地球的一部分，我们观察的出发点在 C 点，地表高度是 CD，我们能看到最远的地方是点 M 和点 N。也就是说，视线在点 M 和点 N 处与地面发生接触，它们处于我们视线以下的地方，再远的地方我们就看不到了，这两点以及 MEN 圆周上的各点，都是我们能看到的地球表面的部分边界，也正是这些点组成了我们眼中的“地平线”，所以



人眼所能看到的地平线解析图。

才觉得苍天和大地在远处交会。

你可能会觉得图示有些不真实，因为在实际生活中，我们总是感觉地平线和眼睛处在同一水平线上，我们登高一点，地平线也会同随着升高，但其实这是一种视错觉，地平线始终处在比人眼低的位置，只不过 *CN*、*CM* 两条线和点 *C* 垂直于地球半径的 *CK* 所形成的角度非常小，在不借助仪器的情况下无法捕捉到。

当我们在地面上方时，比如在飞机上，我们的眼睛似乎依然与地平线处在同一水平面上，仿佛地平线与我们一起升高了。当飞机飞得足够高时，我们会觉得地面仿佛都处在地平线以下，这个视觉现象非常有趣。换言之，大地就像一个嵌入的盆子，地平线就是盆子的边缘。

作家爱伦·坡在他的幻想小说《汉斯奇遇记》中描述过地平线，小说主人公航空家说道：“最使我们惊奇的是，地球看上去竟然变成凹下去的了！我本来以为自己不断升高的时候，一定能看到它凸起来的地方呢！后来我仔细想了想，明白了为何有这种现象。如果从我乘坐的气球向地球竖直引一条垂线，就形成直角三角形的一条直角边，底边是从这条线和地面的交点引向地平线的直线，斜边就是地平线到气球的直线。而我所上升的高度和我的视野相比非常渺小，也就是说，刚才形成的直角三角形的底边和斜边要比竖直的边大很多，甚至可以近似地将斜边和底边看做两条平行线。因此，每一个在地球底下的点都会让我们觉得低于地平线，这就是我们觉得地球表面好像低于地平线的原因。这种情况一直继续到气球达到一个相当高的高度，这个三角形的底边和斜边不能看做平行线为止。”

模糊不清的轮船

如果我们在海岸边或湖边看到一艘轮船，会感觉它从地平线上冒出来的地方并不是它的实际位置，我们的视线和海面相切的位

置才是船所在的地方，但实际上这艘船的位置要比这个地方往后许多。之所以我们用肉眼观察会出现这样的错误，是因为我们判断物体的位置时，会产生一定的视错觉。

不过，当你用望远镜去观察这艘轮船时，能发现这种近距离感其实是一种视错觉，因为从望远镜里看到的远近不同的物体，其清晰程度是不一样的。用已经调好观察近处物体的望远镜观察远处的物体，看起来模糊不清；相反，如果用已经调好观察远处物体的望远镜观察近处的物体，同样也会模糊不清。

如图1所示，假设我们把一台望远镜校准到能把地平线的水面看得清清楚楚，然后用它来观察轮船，会发现轮船的轮廓是模糊的，感觉船离我们很远的样子。相反，如图2所示，如果把望远镜对准轮船校准，那么位于地平线处的水面就变得很模糊，轮船看得很清晰。

拿着你的望远镜，到野外或海边观察一番吧！

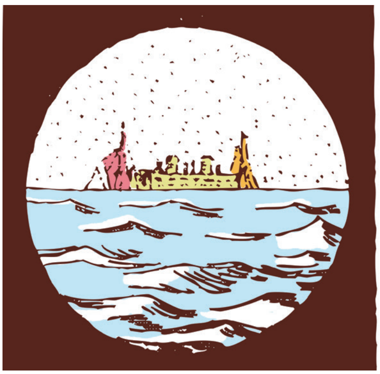


图1 把焦距聚在水面，轮船变模糊。

图2 把焦距聚向轮船，水面变模糊。

在荒岛测量纬度

年少轻狂时，我曾经幻想去经历一段充满刺激、与众不同的生活，比如体验一次船舶失事后的历险，像鲁滨孙一样四处流浪。

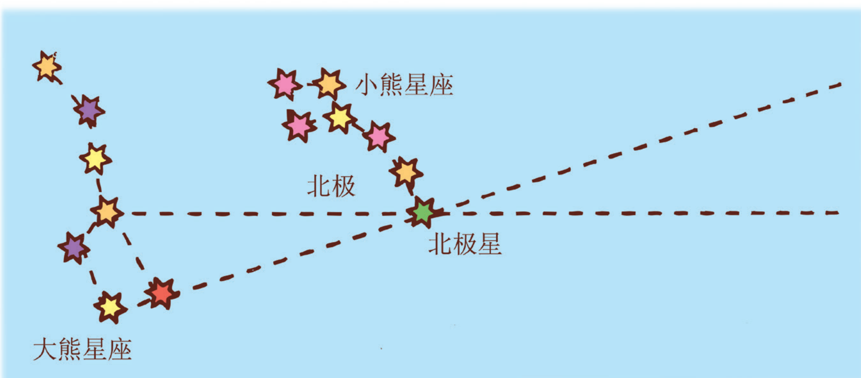
这样的幻想在我脑海中无数次浮现，但生活并没有让我有体验的机会，即便如此，我也让自己做好充分的准备，掌握一些野外生活的本领和技能。

那么，如果有人像鲁滨孙那样被迫在孤岛上生活，他首先需要做些什么呢？首先，要找出这个孤岛的地理位置，用简单的方法进行地理纬度的确定，这项技能不仅流落到荒岛的人们可以用到，对我们平时的生活也很有帮助。

确定经纬度其实并不困难，尤其在晴朗的晚上，你会发现天上的星星耀眼璀璨，缓慢地移动，仿佛在沿着一条看不见的斜轴慢慢行走。这是因为你自己在和地球一起绕着地轴向相反方向旋转。对于身处北半球的我们来说，天上只有一个点是不动的，它处在想象中的地轴延长线的支撑点上。这个点位于小熊星座的尾端，也就是我们经常提到的北极星附近的地方。北半球的人只要在天空中找到北极星，就等于找到了北极。

如图所示，我们先在天空中确定大熊星座的位置，也就是我们常说的像一把勺子的北斗七星，然后沿着大熊星座两星连线的方向，在离大熊星座相当于整个星座长度的地方找到一颗很亮的星星——北极星。

北极星是帮助我们确定地理纬度的好帮手，另一个重要帮手是所谓的“天顶”，也就是我们头顶上空的一个点，即天空中地球半径想象中的延长线的支撑点，这时，你头顶上的这个点和北极星之间弧线的角距，就是你所处位置与北极间的角距。



夜空中如何寻找北极星。

想知道自己所处位置的纬度，只要测量出北极和天顶之间的角度即可。如果你的天顶距离北极星 30°，那么北极星距离你的位置也是 30°，说明你距离赤道 60°，正位于北纬 60° 的地方。因为天顶和地平线之间的角距为 90°，所以从中减去北极星与天顶间的角度差，得到的就是北极星和地平线之间的角度，也就是北极星在地平线上的“高度”。由此我们可以知道，一个地方的地理纬度就是北极星在这个地方的地平线上的高度。

测出神秘岛的纬度

上一节我们以北半球为例，学习了在荒岛野外如何知道自己所处位置的纬度，那么在南半球，又应该如何测定纬度呢？南半球虽然和北半球大体都一样，但能看到的星体有差别，而且没有像北极星那样的星体做参照。虽然著名的南十字星很耀眼，但它离南极十分遥远，无法帮助我们确定纬度，因此只能用最高和最低位置求平均值的方法来测定。

在凡尔纳的小说《神秘岛》里，有一段关于测定纬度的详尽介绍，我们来学习一下，看看小说中的人物在没有测量工具的情况下，怎样确定神秘岛的纬度。

现在已经是晚上八点了，月亮还没有升起，地平线的一端有一片银白色的柔光，那是月亮的辉光。在南半球的点点繁星中，最为耀眼的是南十字星座，史密斯工程师已经花了不少时间来观察这个星座。

“哈伯特，今天是我们这里的四月十五日吗？”史密斯从思考中回过神，问身边的年轻人。

“是的。”

“如果我没弄错的话，明天将是一年里实际时间和平均时间相等的一天，这样的时间一年中只有四天，分别是四月十六日、六月十四日、九月一日、十二月二十四日。在这四天里，太阳经过子午线时指示的正午时分，与我们的钟表指示的时间一致，如果天气

不错的话，我就能大致确定这里的具体经纬度了。”

哈伯特好奇地问：“没有任何仪器也能测定吗？”

“可以啊！如果今天晚上天气不错，我们就能够测出南十字星座的高度，即南极在地平线上的高度，然后试着根据这个高度来确定这里的经纬度，而小岛的经度明天中午时分我就能确定。”

史密斯走进他们居住的山洞，借着火堆的光芒找到两根木条，将它们锯好并将一端连接起来，做成简单的圆规，又找来结实的刺槐树刺做圆规的合页。完成后，史密斯带着圆规回到海边，他必须先测量南极的高度，也就是它高出地平线的高度，这样当明天白天太阳走过子午线时，就可以知道自己所处的坐标位置。

为了更好地观测，史密斯来到一个很高的眺望岗，在计算的时候，这个眺望岗距离海面的高度也要算在内。这时，月亮升起来，地平线被照得十分清楚，南十字星座在天边倒挂着，底部的标志是 α 星，也是距离南极最近的一颗星。

不过，南十字星座离南极有一定的距离，并不像北极星和北极那样相距比较近。A 星在南极 27° 的位置，这段距离也要算进去。史密斯静静地等着这颗星星经过子午线的时刻，这样可以减轻测量工作。

过了一会儿，史密斯将圆规的一只脚放在水平方向上，另一只脚指向

奇趣数字

中华民族崇尚的数字“九”

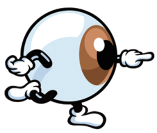
在阴阳学中，奇数为阳，偶数为阴，九是阳数的最大者，故成为极阳数。古人称天为“九天”，屈原《九歌》中“九”的含义为天体宇宙；古人还将地划为“九州”、“九垓”；皇帝贵为天子，所属之地，称为“九重”；宗庙则称为“九庙”，道路谓之“九陌”；山有“九巅”，水有“九河”，地下尚有“九泉”；官有“九品”，以致棋手也分“九段”。《易经》视“九”为吉祥数，中国古代皇家建筑中处处都有“九”：故宫四个角的结构是九梁十八柱，皇家院门上的钉数是纵九横九。

冬至以后开始数九，共有九个九，最后一个九已是春日熙煦，成为“九九艳阳天”了。

南十字星座的 α 星，得到的角度就是 α 星在地平线上的高度。为了能固定这个角度，他用备好的刺槐树刺将另一根木条横着钉到圆规的两只脚上，圆规的形状就不会发生改变了，剩下的工作只需要算出这个角的度数。

史密斯意识到地平线的位置比他的位置低，所以需要测量山冈的高度，换算成高出海平面的度数，也就是南十字星座 α 星的高度，最后通过计算得到南极的地平线高度，即这个岛的地理纬度，因为地球上任意一个地方的纬度等于地球那一极在此地的地平线上的高度。

史密斯拿着圆规，测量出南十字星的 α 星和地平线之间的角距。他将圆周分为 360 等份，经过测量，求得这个角度为 10°，也就是南极的地平线高度。用测量出来的 10° 加上 α 星本来的角距 27°，再加上山冈上换算为海平面高度的角度，最后得出的结果为 37° ，考虑到计算中的一些误差，史密斯判定他们所在的小岛应该在南纬 35° 至 40° 之间。



测定神秘岛的经度

在上一节，我们学习了工程师史密斯测量纬度的方法，接下来我们要学习史密斯怎样测出神秘岛的经度。

哈伯特担心没有仪器无法测量，问史密斯说：“我们什么仪器都没有，该怎么判断太阳经过岛上子午线的时间呢？”

史密斯没有回答，哈伯特见他在岸边选了一块被海浪冲刷得十分干净的地方，又将一根 1.8 米高的木杆竖直插在沙地上，就明白史密斯想根据木杆在沙地上投射出的影子，来确定太阳经过岛上子午线的时间，即确定当地什么时候是正午时间。

到了观察时间，史密斯立即跪在沙地上，将一些木桩插在沙地中，然后把木杆投射的阴影一点点记录下来。哈伯特跟在旁边，拿着一只表，随时准备记录木杆阴影最短的时刻。

这一天是四月十六日，也就是在实际正午和平均正午重合的一天。当木杆阴影变得最短的那一刻就是正午时分，所以必须认真观察阴影顶端的移动情况，以便观测及时精确。

随着太阳的慢慢移动，木杆投射在沙地上的阴影也在慢慢缩短，突然，史密斯发现阴影开始变长，于是立刻问哈伯特："现在是几点了？"

"五点零一分。"

至此，观测工作已经完成，接下来只需要进行简单的计算。

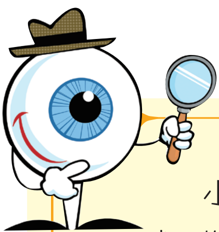
由观测的结果得出，神秘岛的子午线和华盛顿的子午线时差将近五个小时。当小岛还是正午的时候，华盛顿已经是傍晚五点。太阳在环绕地球进行一昼夜的运动时，走1° 需要四分钟，那么一小时能走15° ，用15° 乘以5° ，就是75° 。

华盛顿在格林尼治子午线以西77°3′11″的子午线上，所以神秘岛的位置大概在西经152° 。考虑到观测结果并不十分精确，所以只能判断出神秘岛位于南纬35° 至40° 之间，西经150° 至155° 之间。

几何

圆圈与π先生

Entertaining mathematics



小到一枚硬币、一只戒指、一个皮球，大到蓝色的地球、燃烧的太阳——在我们的生活里，处处都可以见到美妙的圆。那么，你知道有个看不见的隐形人藏在所有的圆里吗？人们给他起了个名字叫“π”，你可以称其为“π先生”。π先生非常神秘，一直在和人类玩着捉迷藏的游戏。直到几千年以前，人们才捉住了他的一条小尾巴，此后，人们又慢慢找出了关于圆的很多秘密。

古人如何求出π的值

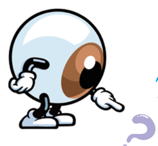
假如我们有一个花瓶，它的直径为 100 毫米，那么它的周长就应该等于 314 毫米。可是，如果你用一根绳子去测量，不一定会正好测得 314 毫米，有可能会出现 1 毫米的误差。出现这样的结果，你可能会怀疑π的值不是 3.14，而是比它大或者小的数字。不过，我们在测量

花瓶的直径时也并不是完全准确的，里面的误差可能会有 1 毫米。这样的话，π 的值就会处在一个较为宽泛的范围里，即在 $\frac{313}{101}$ 与 $\frac{315}{99}$ 之间，计算出来用小数表示就是 3.09 到 3.18 之间。

所以，当用这种方法确定 π 时，我们经常会得到不是 3.14 的结果，有时是 3.1，有时是 3.13，有时是 3.18，偶尔也会得到 3.14，但是测得这个数值时，你不会感觉它有什么特别之处，更不会想到它就是 π 值。

古代埃及和罗马的数学家，与后来的数学家相比，他们并没有按照严格的几何学来确定圆周长度和直径的比值（即 π 值），这个数值是他们凭经验得出来的。古埃及人认为 π 值是 3.16，而罗马人认为 π 值是 3.12。其实，正确的 π 值却是 3.14159…

那么，当时的数学家为什么会出现如此大的误差呢？难道他们不会用一根细绳缠绕在任意一个圆形物体上，然后把绳子解下来，测量一下它的长度吗？你也看到了，我们用测量花瓶的方法来确定 π 值时，得到的结果与 3.14 并不一致，所以类似这样的方法显然不可能得到比较准确的 π 值，这也就不难理解古人为什么不用圆周长与直径的正确比值来算出 π 值，而是直接使用阿基米德以推理的方法得出的 π 的值，即 $3\frac{1}{7}$。



π的精确度是多少

关于圆周和直径的比值，最早进行过精确计算的有两个人——中国的刘徽和祖冲之。刘徽用“割圆术”在公元 3 世纪就算出圆周和直径之间的比值近似为 3.14，他指出用这种方法还可以算出更近似的数值 3.1416。而祖冲之在公元 5 世纪的时候，推算出了更精确的数字，他认为这个比值应该在 3.1415926 和 3.1415927 之间。

在古阿拉伯数学家穆罕默德・本・木兹所著的《代数学》书中

有这样一句话：我觉得计算圆周长的最好方法就是直径乘以$3\frac{1}{7}$，这个方法简单方便，没有谁知道比它更好的方法了，除非是真主。

如今，学过数学的学生都知道这个比值关系，而上一节我们提到阿基米德算出来的$3\frac{1}{7}$的比值并不是准确的数值关系，经理论证明，这个数值并不能用一个简单精确的分数表示，只能写出和它类似的数值。其实，这个精确程度和我们的实际生活没有太大关系，但严苛的数学家却非常乐衷于研究这个比值，从 18 世纪开始就用希腊字母 π 表示，也叫作圆周率。

16 世纪，荷兰数学家卢多尔夫在荷兰的莱顿市将 π 值计算到小数点后 35 位，并立下要把此项数值写在自己墓碑上的遗嘱。他计算出来的 π 值是：3.14159265358979323846264338327950288……

再后来，到了 1873 年，德国的圣克斯又计算出小数点后面 707 位的数值，π 的近似值竟然如此之长！实际上，不管是在实用上还是理论上，计算出 π 值后面的小数点有多少位都没有太大意义，除非你想创造纪录，才会想着要算得比圣克斯更多。

奇趣数字

索洛图思城偏爱的数“十一”

瑞士古城索洛图思对“11”充满了崇拜之情。19 世纪，该城就有 11 座教堂，11 座喷泉，11 座塔楼，11 个消防龙头，州议会有 11 名高级议员。如今，异地游客来到该城时，就有 11 名导游小姐引导您参观 11 座博物馆，11 座喷泉，并有 11 家银行和 11 家饭店为您提供服务。该城偏爱 11 的原因是，1487 年该城成为瑞士联邦的第 11 个州。

当然，的确有很多喜欢探究的人。在 1946 年和 1947 年间，曼彻斯特大学的弗格森和华盛顿的伦奇将 π 值小数点后的位数计算到 808 位，而且他们还发现圣克斯计算的 π 值中第 528 位是错误的，这使两人感到非常骄傲。

从数学家格拉韦讲述的一个事实，可以清楚认识到，我们计算到 π 值小数点后一百位确实没有多大意义。

按照他的计算，假设有一个球体，它的半径和地球到天狼星的距离

相等，也就是 132 的后面再加十个零的千米数：132×10^{10} 千米。如果将这个球体充满微生物，那么每 1 立方毫米有 10 亿个微生物，然后把所有的微生物排列成一条直线，每两个微生物之间的距离恰巧是天狼星到地球的距离。用这个幻想的长度做圆周的直径，将 π 的值取到小数点后一百位，就可以算出这个巨大圆形的周长，并精确到 $\frac{1}{10000000}$ 毫米。

对于这个问题，很多科学家发表了自己的看法。法国天文学家阿拉戈说过：“如果从精确度上来看，即使圆周长和直径的比值可以用一个很精确的数字表示，但是对我们确实没有什么更多更好的用处。”

假如我们知道地球直径的精确长度，那可以通过 π 值求出精确到厘米数的地球赤道的圆周长度，这也只需要知道小数点后面第 9 位数便可以了。同理，假如我们用了小数点后面 18 位，那便能计算出从地球到太阳之间的距离长度，而且精确度可以达到误差不超过 0.0001 毫米——这可比一根头发细多了！

不过，在我们的日常计算中，只需要知道 π 值小数点后两位就足够了。如果想要更精确一点，也只需要记住小数点后四位。根据四舍五入的原则，最后一位数舍 5 取 6，即 3.1416。

用投针试验算出π

我们在计算 π 的近似值时，有一种方法独特而有趣。这个方法需要先准备一些大约 2 厘米长的缝衣针，为了试验方便，最好将针头去掉，使针的粗细保持一致。然后准备一张纸，在上面画好几条平行的直线，每两条相邻的平行直线间的距离等于针长的两倍。

接下来，如图 1 所示，将这根针从任一高度落下。检查针和图上的任一直线是否相交，即使只有针的一端触到所画的平行线，也应视为一次相

交。我们可以在纸张下面垫上厚纸或者呢绒一类的东西，防止缝衣针掉下后反弹。投掷要反复进行，每次针的一端碰到直线就做一个小标记。多次试验后，用投的次数除以和直线相交的次数，就能得到π的近似值。

你一定感到很惊讶，这是巧合吗？让我来解释一下吧！假设缝衣针和直线相交的次数为 K，针长为 20 毫米。当针和直线相交时，相交点肯定在这 20 毫米的某一处。这个针上的每一毫米也就是任何一个部分，和直线相交的机会都是相等的，不会有某段优先的机会，即针上每一毫米与直线相交的次数为 $\frac{K}{20}$，所以针上长 3 毫米的某一段与直线相交的次数为 $\frac{3K}{20}$，如果是 13 毫米，则是 $\frac{13K}{20}$。依此类推，可见最可能相交的次数和长度成正比。

如果把针弯曲为图 2 所示，上面的结论也适用。图 2 的Ⅱ中，假设 AB 段的长度为 11 毫米，BC 段的长度为 9 毫米，那么 AB 段与平行线最有可能相交的次数是 $\frac{11K}{20}$，BC 段就是 $\frac{9K}{20}$。对于整个缝衣针来说，最有可能相交的次数依然是 $\frac{11K}{20}+\frac{9K}{20}$，也就是 K。

如果弯曲成更复杂的情况也是一样的。如图 2 的Ⅲ，不管弯曲多少道，它的每一段和直线相交的机会都是均等的，如果针的两个地方同时和直线相交，当然也都要算进去，不过每一段相交的次数要单独来计。

那么，如果把针弯曲成一个圆形会怎么样呢？这个圆形的直径为两条直线间的距离，也就是比刚才用的针长一倍。这次我们将小环一次次投下，每一次投下的小环都应该和这些直线有两个交点，按前面的计算方法，计为 2 次。如果我们用 N 表示投下的总次数，

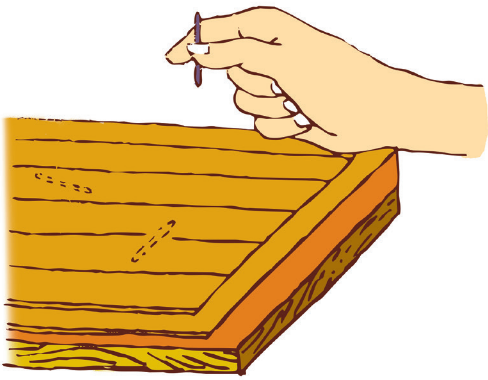


图1 | 蒲丰的投针试验。

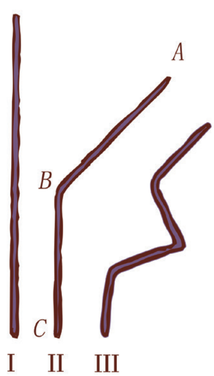


图2 | 投针的三种不同弯法。

那么相交的次数就应该是 $2N$。

我们之前用的针，长度要比圆环的周长短，这样针的长度和圆环周长的比值，就是圆环半径和圆环周长的比，也就是 $\frac{1}{2\pi}$。加上我们刚才得出的结论——和直线最有可能相交的次数和针的长度成正比，所以 K 和 $2N$ 是成正比的，并且比值是 $\frac{1}{2\pi}$，所以 K 等于 $\frac{N}{\pi}$，我们可以得到 π 的表示：

$$\pi=\frac{N}{K}=\frac{\text{投针次数}}{\text{相交次数}}$$

在 19 世纪中叶，瑞士有位天文学家沃尔夫曾经做过这个试验。他在带格子的纸上做了 5000 次试验，得到的 π 值为 3.159……数值精确度竟然如此高，仅次于阿基米德推导出的数字。所以，投掷的次数越多，求出来的 π 值也就越精确。

那么，如你所见，在这个试验里，我们既没有计算圆周的周长，也不用量直径，便可以求出圆周长与直径的比。因此，即使你是从来没有学习过几何学的人，只要按照以上方法进行无数次的试验并做好记录，也可以计算出 π 的近似值。

头走得远还是脚走得远

在儒勒·凡尔纳的作品中，有一位主人公在环球旅行时提过一个问题：人在走路的时候，身上的哪一部分走的路程最长？是头还是脚？我们可以借此来做一道几何学的题目。

【题目】如果你绕着地球的赤道转了一圈，那么你的头比你的脚多走了多少路呢？

如果用 R 表示地球的半径，你的双脚走过的路程则为 $2\pi R$。假设你的身高为 1.7 米，属于中等中材，那么你的头走过的路程就是 $2\pi(R+1.7)$，二者的路程差等于：

$$2\pi(R+1.7)-2\pi R$$
$$=2\pi\times1.7$$
$$\approx10.7\text{（米）}$$

结果算出来，头和脚相比，多走了十米多。

我们注意到，最后结果和地球半径并没有关系。也就是说，不管你在哪一个星球，木星、月球或者是小行星上,这个结果都是一样的。一般而言，两个同心圆的周长的差，是由这两个圆的间距决定的，并不因它们的半径大小不同而发生变化。因此，在地球轨道半径上增加一定的长度，它的圆周也会随之加长。这和增加硬币的半径，硬币周长也随之增加是同样的道理。

下面有一道非常有趣的题目，曾经被编入到许多数学游戏的书籍中。

【题目】假设我们将一根铁丝紧紧捆在地球的赤道上，再将铁丝加长 1 米，那么一只小老鼠会不会从地球与铁丝形成的空隙间钻过去?

我们都会以为这个空隙非常非常小，肯定比一根头发丝还细，那么事实如何呢？虽然和地球赤道的长度 40000000 米相比，1 米算不了什么，但我们可以计算出空隙的大小：

$$\frac{100}{2\pi}\approx 16\text{（厘米）}$$

你会惊奇地发现，原来空隙这么大！不要说一只小老鼠，就是一只肥猫也能钻过去。

硬币自己转了多少圈

【题目】如图 1 所示，有八个大小相同的硬币。其中有七个硬币涂有颜料，并且固定不动，第八个硬币没有涂颜料，沿着那七个硬币的边缘滚动。如果这枚硬币绕着其他静止的硬币走一圈，它自己要转多少圈呢?

假设你亲自摆好这几枚硬币，然后盯着第八个硬币上的数字，一旦数字回到起始位置，就代表硬币转了一圈。这个实验不要凭空想象，否则你会越想越糊涂，若能实际操作一遍，你会发现硬币只需要转动四圈，就能转完其他七个硬币。

如果手头实在没有硬币，可以通过计算得出相同的答案。首先，我们要弄清硬币在滚动绕过静止硬币时会走怎样的路径。我们想象出来的运动轨迹和图 1 中虚线显示的一样。从图

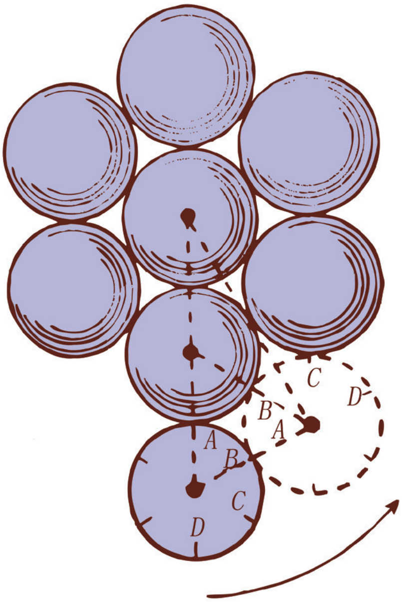


图1 无阴影的硬币绕有阴影的硬币公转一圈，需自转多少圈?

上可以看出，滚动的圆所走的弧线 AB 对应的圆心角度数为 60°，在每一个静止的圆的圆周上都有两个这样的弧线，它们构成圆心角度数为 120° 的弧线，或者 $\frac{1}{3}$ 的圆周。由此可以得出一个结论：当绕过一个静止的圆的 $\frac{1}{3}$ 圆周后，滚动的圆相应地自己也转了 $\frac{1}{3}$ 圈。我们知道，静止在圆周上的圆一共有 6 个，那么滚动的圆也就转了 $\frac{1}{3}\times 6=2$ 圈。

可是，这个结果和我们试验的结果相差一倍，到底是哪里错了呢？我们亲自试验的结果不应该出错，肯定是在计算的时候出了错。

我们再来看看上面的分析过程。当圆在运动时，如果是沿着圆周长的直线段进行滚动，那么它自转的圈数

奇趣数字

受人青睐的“十二”

在西方国家，“12”这个数备受人们的青睐。如长度单位 1 英尺等于 12 英寸；质量单位 1 磅等于 12 盎司；1 先令等于 12 便士；1 打等于 12 个；足球比赛中的点球的距离为 12 码等。

中国也喜欢“12”这个数字：如十二地支，十二生肖，一昼夜分十二时辰等，还有《红楼梦》中的十二金钗，一年有十二个月，时针走一圈为十二小时，音乐中的十二平均律等。人身上的结构也与“十二”挂钩：脑有十二对脑神经，人有十二经脉，两个眼球共有十二块成对分布的眼外肌，胸有十二块胸椎、十二对肋骨、十二个胸节，并由此发出十二对神经。

的确是$\frac{1}{3}$。但如果它是沿着弧线进行滚动，这个结果就不对了，它不是转了$\frac{1}{3}$圈，而是自转了$\frac{2}{3}$圈。这是个关键，要是没有理解，可以多画几遍它的轨迹再琢磨。因此，当滚动的圆转过六个硬币后，便能算出它自转了$\frac{2}{3}\times 6=4$圈。

下面，我再来解释一下其中的原理。如图中虚线所示（图 2），运动的圆绕着固定的圆走过 AB 弧线，这个弧度为 60°，也就是全圆周的$\frac{1}{6}$。此时最高点不是 A 点，而是移到了 C 点，说明圆周上的每个点转动的度数是 120°，也就是相当于滚动了全圆周的$\frac{2}{3}$。所以，滚动的圆按照直线所走的路程和按照曲线所走的路程相差很远。

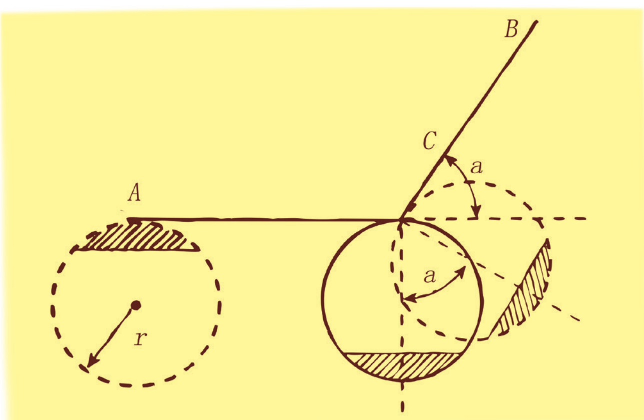


图2｜圆形在折线上滚动时会产生多出来的旋转

接着，我们再来练习一道题，检验一下自己到底有没有明白上面说的原理。

【题目】如果用一个圆绕着一个正六边形旋转，它自己一共自转多少圈？（图 3）

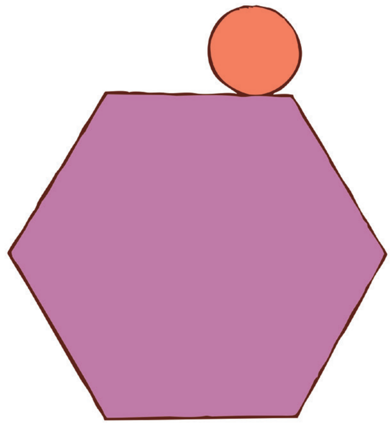


图3｜圆形沿多边形的边会比沿它展开的周长多滚动多少距离？

题目所求转动的总圈数应该等于它沿着六条边直线所转的圈数，以及它在六个角所转的圈数，六条边也就是六边形的周长，六个角的和除以 2π 所得的商就是圈数。

因为任何一个凸多边形的外角和一定，都是 2π，所以$\frac{2\pi}{2\pi}=1$。那么，圆形在六边形外围上滚动一周的转数，比它

在各个边上转动的转数要多出一圈，而当一个凸角的正多边形无穷增加就会接近圆周，所以刚才的结论也适用于圆周。

所以在刚才的题目中，硬币沿着相等的硬币的弧线滑动时，滚动的即是 $\frac{2}{3}$ 周，这用几何学来解释就很容易。

蒙着眼睛还能走直线吗

不知道你在班级里玩没玩过画鼻子的游戏，在离黑板有段距离的地方，蒙上眼睛向前走，给黑板上画的头像上画上鼻子。在蒙上眼睛之前，大家都觉得自己看得很准，一定能画在正确位置，结果呢，能画正鼻子的人很少，这是为什么呢？

原来，当人们被东西蒙住眼睛后，他走路的方向会立刻发生改变，所走路线肯定会偏离直线，或者干脆在原地转圈，而他们自己却全然不知，觉得自己一直在往前走。（图 1）

如果在暴风雪或大雾弥漫的恶劣天气下行走在荒漠戈壁上，手里又没有指南针这种辨别方向的装备，在这种无法判断方向的情况下，我们走来走去只会永远在绕圈，走一会儿又回到刚才走过的地方，好像被施了魔咒，永远也走不出去。这样一来，旅行家就迷路了，这是很危险的。后来，人们发现，步行者兜圈子时，圈的大小范围约为直径六十到一百米的一个大圆，速度越快，偏离程度越大，圆圈的半径越小。

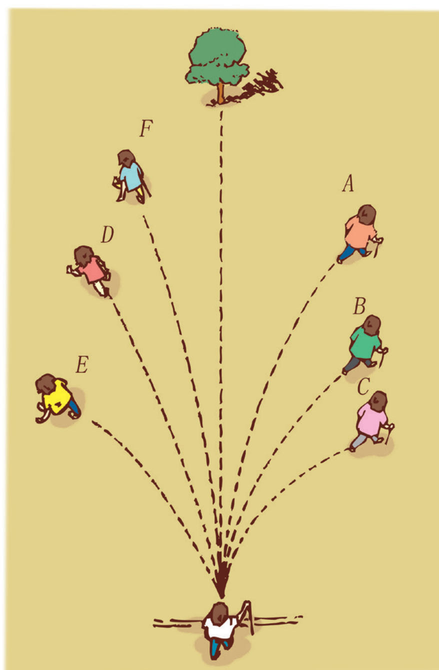


图1　人在蒙着眼睛的情况下行走会偏离直线

对于这个有趣的现象，人们专门做过很多实验，下面是其中一个：有 100 名将要成为飞行员的人整齐排列在绿色的机场上。将他们的眼睛蒙住后，发出齐步向前走的口令，准飞行员们便一起向前走去。结果，没过一会儿，就看到有的人开始往左，有的人开始往右，到后来，本来整齐的队伍乱作一团，有些人开始原地打转，一直在走自己走过的路。

在威尼斯的圣马可广场上也做过一个关于这种现象的实验。研究人员将一些志愿者市民的眼睛蒙起来，让他们从教堂广场的一端走向另一端。这段距离其实只有 175 米，但这样短的距离，蒙上眼睛的人们竟然没有一个人走到终点，所有的人都不知为何歪到一边去了（图 2），好像都设定好了似的走着弧线，更有人撞到一旁的柱子。

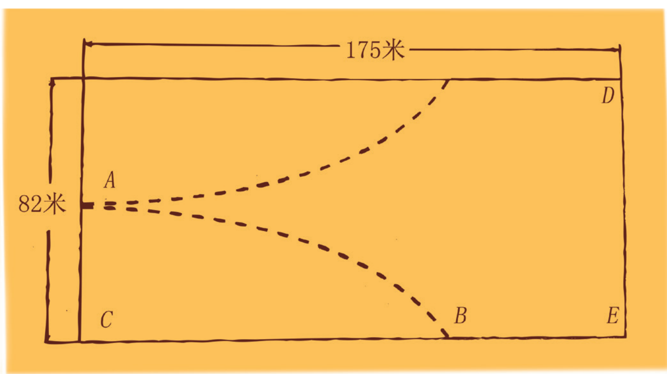


图2｜在威尼斯圣马可广场上的实验记录

作家列夫·托尔斯泰曾在《主人和雇工》中有过这样一段描写，生动回放了迷路人转圈的情景：

这时候，大雪依然在下，风更大了，瓦西里·安德烈伊奇骑在马上，扬鞭策马地往前奔跑着。他觉得自己正在往树林里护林小屋的方向前进着，不过大片的雪花迷住他的双眼，狂风好像在和他作对，寒气逼人，他不断地将身子放低，把皮袄不断地塞在身子下面，才能觉得暖和一些。

他不断策马向前赶着，时间一分一秒地过去，他觉得已经走了很久，但在被大雪笼罩的荒原里，除了马头他什么都看不到，除了耳边呼啸的风声什么都听不到，就好像走进一个皑皑的白雪世界，没有任何人，只有他和他的马。

突然，眼前一片黑黑的东西让他兴奋起来，立刻策马向那里奔去。他以为自己看到的是护林小屋的院墙，但是这个黑色的东西在空中摇摆着，并不是静止的，走近一看，原来是一簇高高的蒿草。

长在田埂上的蒿草从积雪下面顽强地钻

出来，在寒风中尽情摇摆。狂风将它压倒在地上，风吹过发出呜呜呜的声音。狂风对蒿草的折磨令瓦西里·安德烈伊奇心头一震，仿佛此时自己就如同蒿草一般在与这狂风和大雪作着斗争。他继续策马向前赶去，但没有想到的是，在走向这个蒿草的同时他的方向已经改变了，他心里想着是往小屋的方向前进，却不知已经偏离很远，走到另一边去了。

没过一会儿，瓦西里·安德烈伊奇又在前面的地方看到了一片黑色的东西，他又高兴起来，他觉得这次一定是来到护林小屋旁。可是骑马过去一看，竟然又是一簇高高的蒿草，依然是在田埂上迎风摆动，看起来令人害怕。这时他惊奇地发现，在这蒿草旁边有几个模糊的马蹄印，虽然被雪花盖住了些，但还是依稀可见。他走到那个马蹄印旁边，蹲下来仔细观察，发现这印记不是别人的，正是自己的马留下的。如此看来，他刚才一直在转圈，不过这圈不大，没一会儿就回到原地。

关于这样的小说情节还有很多，如果你读过儒勒·凡尔纳的《哈特拉斯船长历险记》，里面这一段情节你应该大概还有印象，那是一段关于在荒无人烟的雪原上，旅行者迷路后原地打转的情节：

“我的朋友们，你们看，这是我们自己的脚印啊！”博士让大家看脚下，大声喊道，“看来我们是在大雾里迷路了，看，我们走来走去又走回来……”

探险家们在探险时发现，很多动物也有这种迷路的情况。比如在冰雪荒原上，拉雪橇的动物也是经常走大圈儿。如果将小狗的眼睛蒙住，然后放入水中，它们也会在水中打圈圈；而天上的飞鸟如果眼睛瞎了，也会飞成圈圈。被猎枪打伤后受到惊吓的野兽逃窜时跑的不是直线而是螺旋线，它们已经失去了判断方向的能力。

动物学家告诉我们，很多动物的行迹都是弧形的，包括蝌蚪、水母、螃蟹，甚至水中的很多微生物都是这样的。现在人们可以有照明设备和辨别方向的设备，在黑暗的森林或者荒原上不太容易迷路。不过对于常年生活在荒漠草原或者海洋里等地方的动物们来说，辨别方向可是一件大事。

如果动物们一直在原地转圈，就很有可能影响它们的生活，甚至危及它们的生命。这个原因像一条无形的

锁链拴着动物们，让它们都不会远离家乡。所以，即使闯入荒原的狮子也会回到原来的地方，即使把巢穴搭在峭壁，飞去大海中的海鸥也还能够回来找到自己的窝。

那么，为什么人们或动物在黑暗中无法保持直线运动而经常打转转呢？其实在提出这个问题之前，我们先了解一下想要走直线要具备哪些条件，如果直接回答打转转的问题，似乎缺少一些神秘感。

我们可以想一下，小时候玩的那些装有发条的小汽车，它们有时候并不听话，经常无法直行到处乱跑。小汽车这个跑曲线的现象很好解释，大家也不觉得有什么神秘，这是由车轮不一样大导致的。不过，由此可以看出，如果人或动物两侧的肌肉运动完全一致，自然也可以不需要眼睛的帮助走直线。不过，我们都知道，人和动物在身体发育和生长时无法完全均衡，很多人右侧身体的肌肉发育要比左侧强壮一些。

所以，如果一个人的右腿迈出的步子比左腿稍大，行走时无法走直线就是很正常的事情了。在没有眼睛的帮助下，人无法修正走偏的路线，所以不可避免地一直向左偏移。这和划船时一样，我们右手划桨的力量要比左手有力很多，这样船的方向根据几何学原理来看也是会向左偏斜。

不过，如果你的左腿比右腿迈出

01 02 03 奇趣数字

西方的“十三”恐惧症

1970 年 4 月 11 日发射的美国“阿波罗 13 号”宇宙飞船的爆炸事后查明是设计缺陷所致。但有许多报纸认为，除了技术原因外，还由于有“13”从中作祟。在他们看来，飞船编号为 13，发射台为 39 号 (13 的 3 倍)，爆炸又发生在中部时间 13 日 13 时 13 分，这么多的“13”从中作祟，“阿波罗 13 号”便“劫数难逃”了。

在西方社会众多的人都忌讳“13”。不仅高级的公寓和医院没有 13 号房间，而且这一天的飞机、火车和轮船也少有人问津，给美国运输业每年带来 10 亿美元的损失。有趣的是，连一代枭（xiāo）雄拿破仑、美国石油大王保罗格蒂、英王伊丽莎白、美国前总统胡佛和罗斯福等大人物都惧怕“13”！

的距离大，每次多迈出 1 毫米，走出 1000 步后，左腿就会比右腿多迈出 1 米，所以这样走出来就是两个相同圆心的圆圈，想要使两条腿走平行直线是不可能的。

在 1896 年，挪威一位名叫古德贝克的生理学家对蒙眼转圈这个现象进行了专门的研究，并且通过很多真实事例进行了验证，下面我们来看看他搜集的两个例子。

在一个风雪之夜，如果有三个人在哨岗值班，他们想要回家就需要走出宽四千米的山谷。他们的家在图上虚线所指的方向。但是在回家的途中，他们都不知不觉地偏向了右面。（图 3）

根据他们自己的速度计算，一定时间内应该可以走到家。可实际上，他们非但没有到达目的地，反而回到了哨岗棚。于是，他们再次上路，但

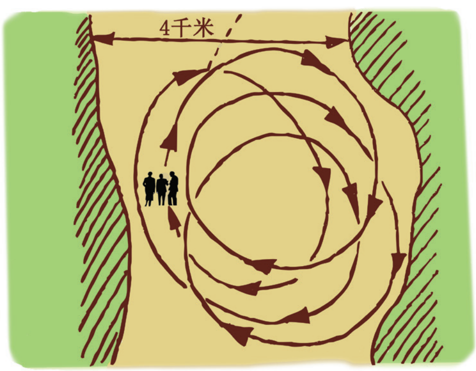


图3｜三个迷路的人各自所走的路线

这一次偏移得更厉害，比上一次更快地回来了。就这样，他们一次次出发，一次次回来，来来回回折腾五次，结果都一样，最后只好放弃回家的想法，在哨岗棚等到天亮再回家。

还有一个例子是在一个大雾弥漫的晚上，天上看不到星星，没有一点光亮。在这样的情况下，就算是在大海里，想要划船走直线也是一件十分困难的事情。在这种天气下，有人想要横渡宽四千米的海峡。他们在雾气的笼罩下，无法辨别方向，只能一直向前划去。本以为已经到达了岸边，却一直没有看到海岸，只在大海里转圈，转来转去却回到出发的地方。

其实，我们可以算出第一个例子中，他们的左腿比右腿迈出的每一步到底长多少。以在雪谷里转圈的平面图来计算，因为他们在行进中向右偏斜，我们得知他们的左腿要比右腿迈得长一些。人在行走的时候，左右两脚足迹线之间距离大概是 10 厘米（图 4）。

当人走出一个整圆，这时候他右腿所走过的路为 $2\pi R$，左腿所走的距离为 $2\pi(R+0.1)$，式中 R 为这个圆周的半径，单位为米。那么 $2\pi(R+$

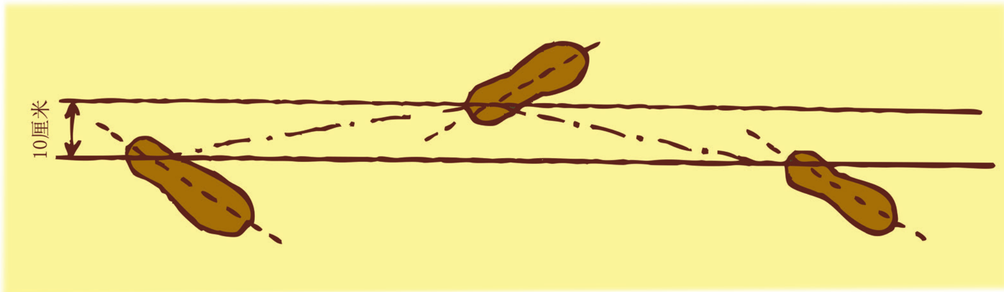


图4 | 走路时左右两脚的路线

0.1）$-2\pi R$ 的差为：

$$2\pi(R+0.1)-2\pi R=2\pi\times 0.1$$

求出的结果为 0.63 米，也就是 630 毫米，也就是左右腿所迈出步子的长度差。由于两条腿重复的次数就是步子数目，由此可得出那几个人兜圈子所转的圆圈直径大概是 3.5 千米，周长是 10000 米左右。如果每一步的步长平均为 0.7 米，那么这段路走了 $\frac{10000}{0.7}\approx 14000$ 步，两只脚各迈了 7000 步。不过，左脚和右脚所走的 7000 步是不同的，左脚要多走 620 毫米，也就是左脚每迈出一步，要比右脚多出 $\frac{620}{7000}$ 毫米，结果还不到 0.1 毫米，虽然数值小得几乎微不足道，却能导致如此惊人的结果。

左右两腿迈出的步差决定了迷路人走出的圆圈半径，也就是所兜圈子的大小。比如在步长为 0.7 米时，这个圆圈迈出的步数是 $\frac{2\pi R}{0.7}$，R 为圆圈的半径，单位为米，左右两脚迈出的步数是 $\frac{2\pi R}{2\times 0.7}$。如果用这个步数与步长的差 x 相乘，那么就可以算出左右两腿分别走出的同心圆的周长的差值，其中 R 与 x 的单位为米：

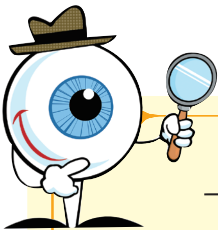
$$\frac{2\pi\times Rx}{2\times 0.7}=2\pi\times 0.1$$

根据这个简单的公式，以及已经知道的步差的值，很容易计算出圆圈的半径。同理，如果知道圆圈的半径，也可以求出步差。

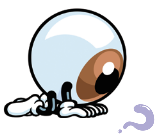
综上所述，我们知道蒙着眼睛行走时发生偏离是很正常的现象，不走直线的原因是步差。如果想在不依靠眼睛的情况下保持直线运动，那么身体的各个部位都需要严格地对称，对于生物界来说，基本上是不可能的事情。

代数几何综合
有趣的数学题

Entertaining mathematics



一串数字多么枯燥！一道方程题怎么那么难解？莫非是我脑子太笨了？千万别这么想，数学本身非常有趣，只是在课堂上被一些死板的老师教得乏味无比。真要离开了那死气沉沉的课堂，保不准它会变得对你特别有吸引力呢。比如找个对手下一盘棋，拿起锯子当一个小木匠，兴致勃勃地去看一场摩托车赛，或者登上侦察船搜索一片未知的海域，那该有多么好玩啊！——有趣的数学题恰恰就隐藏在其中。



侦察船何时返回

【题目】舰队里有一艘侦察船，奉命侦察舰队前进线上70英里的海域，舰队每小时向前行进35英里，侦察船每小时向前行进70英里。问：多长时间后这条侦察船可以返回到舰队里来？

假设 x 小时之后，侦察船可以回到舰队。在这段时间舰队一共行驶了

$35x$ 英里，侦察船一共行驶了 $70x$ 英里。对于侦察船来说，它是先向前航行 70 英里，又折返回来的，而侦察船和舰队航行的总路程是 $70x+35x$，等于 2×70 英里。由此我们可以得出方程

$$70x+35x=140$$

解方程可得：

$$x=\frac{140}{105}=1\frac{1}{3}$$

也就是说，侦察船过了大约 1 小时 20 分钟后可以回到舰队里来。

下面，我们再来做一道与侦察船相关的题。

【题目】侦察船接到一个命令，需要对某海域进行侦察。按照命令的指示，侦察船侦察的时间不得超过 3 个小时，就必须回到舰队中。假如侦察船每小时可以行驶 60 海里，舰队每小时可以行驶 40 海里，问：侦察船离开舰队后多长时间就应该开始折返回来?

假设侦察船 x 小时后开始折返回来，也就是说，侦察船离开舰队后向前行驶的时间是 x 小时，然后又折返回来向着舰队行驶了（$3-x$）小时。当侦察船和舰队行驶的方向一致时，在 x 小时的时候它们之间的距离就是它们各自航行的路程之差，即：

$$60x-40x=20x$$

侦察船掉头以后，它朝着舰队航行的距离是 60（$3-x$）海里，而舰队本身航行的距离是 40（$3-x$）海里。它们在这段时间内航行的路程之和，即是方向一致时航行的路程之差，也就是 $20x$ 海里。据此我们可以列出方程：

$$60(3-x)+40(3-x)=20x$$

解方程得：

$$x=2\frac{1}{2}$$

也就是说，侦察船应该是在离开舰队 2 小时 30 分钟时开始折返回来。

奇趣数字

西非人尊贵的数“四十一”

生活在尼日利亚的阿拉苏维人、约鲁巴人的最高级礼仪往来中，所用的祭物、供品都必须与“41”相关。如 18 世纪初，阿拉苏维族被约鲁巴人战败后，每年都要进贡“年轻男女各 41 名，兽皮 41 张，小包裹 41 只，每只包裹中放 41 条树皮缠腰巾”等。

自行车手的骑车速度

【题目】两个赛车手沿着长度为170米的环形赛道以固定的速度骑自行车。如果他们朝着相同的方向前进，170秒之后，速度较快的那个人刚好超过速度慢的那个人一圈；而如果他们朝着相反的方向前进，那么10秒钟之后，他们就会第一次相遇。问：这两个人分别以多快的速度前进？

假设第一个人每秒钟能骑 x 米，那么在10秒钟内他向前行驶了 $10x$ 米。两人沿着相反的方向骑时，第二个人在两次相遇的中间所驶过的就是圆圈的剩余部分，即（$170-10x$）米。现在我们设第二个人每秒钟能骑 y 米，那么在10秒钟内他所驶过的距离也就是 $10y$ 米。据此，我们可以列出方程：

$$170-10x=10y$$

而当这两个人朝着相同的方向行驶时，那么在170秒内第一个人所经过的距离是170米，第二个人所经过的距离是 $170y$ 米。现在我们假设第一个人比第二个人要骑得快些，那么从第一次追上到第二次追上的中间，第一个人比第二个人正好多走了一圈，也就是：

$$170x-170y=170$$

化简这两个方程得：

$$x+y=17，x-y=1$$

最终可以解出：

$$x=9，y=8$$

也就是说，第一个人每秒钟能骑9米，第二个人每秒钟能骑8米。

三辆摩托车的比赛

【题目】在一次摩托车比赛中，参赛的摩托车同时从起点出发，由于速度不同，第一辆车最先到达终点。第一辆车到达终点12分钟之后，第二辆

车到达了终点，之后又过了 3 分钟，第三辆车也到达了终点。已知，第一辆车的时速比第二辆车快 15 千米，而第二辆车的时速又比第三辆车快 3 千米。那么，赛道的长度是多少？三辆车分别以什么速度，用多长时间跑完了全程？

题目中需要求出的未知数有七个之多，但是我们在解题时却并不需要设那么多未知数。在解题时我们只需要设两个未知数就可以了：

假设第二辆摩托车的行驶速度为 x，那么第一辆摩托车的行驶速度就是 $x+15$，而第三辆摩托车的行驶速度就是 $x-3$。

假设赛程为 y，那么每辆摩托车到达终点所用的时间分别是：

第一辆车 $\frac{y}{x+15}$ 小时

第二辆车 $\frac{y}{x}$ 小时

第三辆车 $\frac{y}{x-3}$ 小时

因为第二辆车到达终点所用的时间比第一辆要多 12 分钟，也就是 $\frac{1}{5}$ 小时。

据此我们可以列出方程：

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}$$

又因为第二辆车到达终点所用的时间比第三辆车少 3 分钟，也就是 $\frac{1}{20}$ 小时，所以：

$$\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}$$

把第二个方程乘 4，然后用第一个方程减去这个乘积可得：

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}-4\left(\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}\right)=0$$

方程两边同时除以 y（$y\neq 0$），化去上述方程中的分母，得到方程：

$$15x(x-3)=12x(x+15)$$

解方程可得：

$x_1=75$，$x_2=0$（舍去）

也就是说，第二辆摩托车的速度是每小时 75 千米。

将 x 的值代入第一个方程中，可以得出：

$$x=90$$

根据 x 和 y 的值，我们很快能求出三辆摩托车各自的速度分别为：90 千米/小时，75 千米/小时，72 千米/小时。

比赛全程的长度为 90 千米。

三辆摩托车跑完全程所用的时间分别是：

第一辆车…………1 小时，

第二辆车…………1 小时 12 分钟，

第三辆车…………1 小时 15 分钟。

至此，这道题就完全解答出来了。

如何恢复被涂掉的数据

【题目】商店在核查账本时，发现一滴墨水盖住了其中两处记录（如图），从剩下的痕迹中不能看出具体卖出了多少米的毛绒布，但是可以看出这个数是个整数，而且每米布的单价是 49.36 卢布。另外，最终卖得的钱数的后三位数字是 7.28，可以分辨出这三位数字前面还有三位数字。问：核查账本的工作人员能不能根据剩下的这些痕迹恢复这份记录？

为了解出这道题目，我们可以设卖出布料的米数为 x，卖得的钱中被盖住的那个三位数为 y，由此可以计算出卖这些布所得的钱数用戈比表示就是 $4936x$，所以可得出方程

$$4936x = 1000y + 728$$

被墨水盖住数字的账本

化解方程可得：

$$617x-125y=91$$

在这个方程中，x 和 y 都是正整数，且 y 的值不能大于 999 也不能小于 100。利用前面所讲的方法解出这个方程：

$$125y=617x-91$$

$$y=5x-1+\frac{34-8x}{125}$$

$$=5x-1+\frac{2(17-4x)}{125}$$

由于 x、y 都是整数，所以分数 $\frac{2(17-4x)}{125}$ 也是一个整数。

又因为 2 不能被 125 整除，所以 $\frac{17-4x}{125}$ 也一定是一个整数。

设 $\frac{17-4x}{125}=t$，得出

$$17-4x=125t$$

这里设 $t_1=\frac{1-t}{4}$，

所以

$$4t_1=1-t$$

$$t=1-4t_1$$

又因为

$$17-4x=125t$$

所以得出

$$x=125t_1-27$$

$$y=617t_1-134$$

由于

$$100\leqslant y<1000$$

所以

$$100\leqslant 617t_1-134<1000$$

解不等式得出：

$$\frac{234}{617}\leqslant t_1<\frac{1134}{617}$$

因此 t_1 只能取整数 1，所以，

奇趣数字

“八十八城”

美国的肯塔基州有一个崇拜“88”的小城，将每年的 8 月 8 日定为假日。商店的商品定价大多为 88 或 88 的倍数，因此这座城的名字也叫“八十八城”。“八十八城”名字的由来，是当地邮政局长在给该城命名的时候，发现口袋里有 88 块铜钱。有趣的是，在 1948 年美国举行总统大选时，“八十八城”的公民中有 88 名投了民主党人杜鲁门的票，另有 88 人投了共和党人杜威的票。

$x=98$，$y=483$。

也就是说，卖出布料的长度为 98 米，卖得的钱是 4837 卢布 28 戈比。账本上的这条记录通过这样的方式得以恢复。

只设不求的未知数

【题目】伊丽娜有位好友住在山上。这天，她一时兴起要去拜访这位朋友。伊丽娜先是以每小时 4 千米的速度走了一段平路，然后再以每小时 3 千米的速度爬上山顶。很不巧的是，这位朋友不在家，所以伊丽娜又按原路返回。在下山的时候，伊丽娜的速度明显加快，变成了每小时走 6 千米。到达平地后，伊丽娜有些疲惫，还是以原来每小时 4 千米的速度走完了这段路程。已知伊丽娜从下午三点出发，晚上八点回到自己家，那么，你能根据这些条件算出她一共走了多少路程么？

如果不仔细分析，你可能会觉得这些条件是不足以来解答这道题的，其实并非如此。

根据题目给出的条件，伊丽娜的整个路程分成以下四段：走平路、爬山、下山、再走平路。我们可以设 x 为伊丽娜走完的全部路程，她上坡（或下坡）走过的路程为 y。

根据条件，可以得出：伊丽娜第一次走平路所花的时间是 $\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}$；她爬山所用的时间是 $\dfrac{y}{3}$；她下山所用的时间为 $\dfrac{y}{6}$；最后，她在走平路用的时间是 $\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}$。

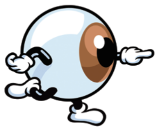
由此，可以列出方程：

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=8-3$$

经过计算，我们发现，在整理化简方程时，y 这个未知数得以消除了，原方程也就变为 $\dfrac{x}{4}=5$。由此，可以得出 $x=20$ 千米。

所以，伊丽娜走过的全部路程是

20 千米，但她在四个分段路程分别走了多少千米,我们却不得而知。也因此，我们一开始设的 y 也就变成了一个只设不求的未知数。



三姐妹卖鸡

【题目】三姐妹带着母鸡到集市上去卖。第一位带了 10 只，第二位带了 16 只，第三位带了 26 只。上午，她们各自按同样的价钱卖出了一部分鸡；到下午的时候由于担心卖不完，她们便适当降低了价格，然后仍以同样的价钱卖完了剩下的鸡。回家的时候，每个人手里的钱都是 35 元。问：她们上午、下午卖鸡的价格分别是多少？

假设三姐妹上午所卖出的鸡的数量分别为 x、y、z。由题意可以知道，她们下午所卖的鸡的只数分别为：$10-x$、$16-y$、$26-z$。再设上午卖鸡的价格为 m，下午卖鸡的价格为 n。

据此，我们可以计算出三姐妹中的第一位卖得的钱为：

$mx+n(10-x)$

第二位卖得的钱为：

$my+n(16-y)$

第三位卖得的钱为：

$mz+n(26-z)$

由于三人所卖的钱均为 35 元，经过对上面表达式的整理，我们可以写出下面这三个方程：

$$\begin{cases}(m-n)x+10n=35\\(m-n)y+16n=35\\(m-n)z+26n=35\end{cases}$$

先用第三个方程减去第一个方程，然后再用第三个方程减去第二个方程。之后，我们可以得到如下方程组：

$$\begin{cases}(m-n)(x-z)=16n\\(m-n)(y-z)=10n\end{cases}$$

用上面方程组的第一个方程除以第二个方程，可得：

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5}\text{或者}\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}$$

由于 x、y、z 都是整数，所以 $x-z$，$y-z$ 的值也都是整数。

要使 $\dfrac{x-z}{8}=\dfrac{y-z}{5}$ 成立，$x-z$ 必

须能被 8 整除，$y-z$ 必须能被 5 整除。

设 $\frac{x-z}{8}=t=\frac{y-z}{5}$，那么，

$$\begin{cases} x=z+8t \\ y=z+5t \end{cases}$$

由于 $x>z$，而且三个人得到的钱一样多，所以 t 不仅仅是一个整数，而且必须是一个正数。

又因为

$x<10$

所以

$z+8t<10$

由于 z 和 t 必须取正整数，所以要使不等式成立，z 和 t 必须同时取 1。

把 z 和 t 的值代入方程

$$\begin{cases} x=z+8t \\ y=z+5t \end{cases}$$

可以得出：$x=9$，$y=6$。

将 x、y 的值代入下面方程组：

$$\begin{cases} mx+n(10-x)=35 \\ my+n(16-y)=35 \\ mz+n(26-z)=35 \end{cases}$$

可以求得：

$$m=3\frac{3}{4},\ n=1\frac{1}{4}$$

也就是说，上午鸡的售价是每只 3.75 元；下午鸡的售价是每只 1.25 元。

一笔画成图

如图 1 所示，如果将图中五个图形用铅笔描画在一张纸上，并且要求每个图形必须一笔描出，既不能中断也不能重复地描下来，你能做到吗？

可能你会觉得（d）图看起来线条少，应该不难一笔画完，但当下笔时你才会知道，怎样都不能以一笔画出。于是你试着去画（a）图和（b）图，很容易就完成了，甚至连非常复杂的（c）图也可以一笔画完，只有（d）图和（e）图无法做到。为什么有的图形可以一笔画完，有的图形就不行呢？

我们来看看图形中线与线相交的点，如果聚集在一点的线条数为偶数，这个交点就叫偶交点，如果线条数为

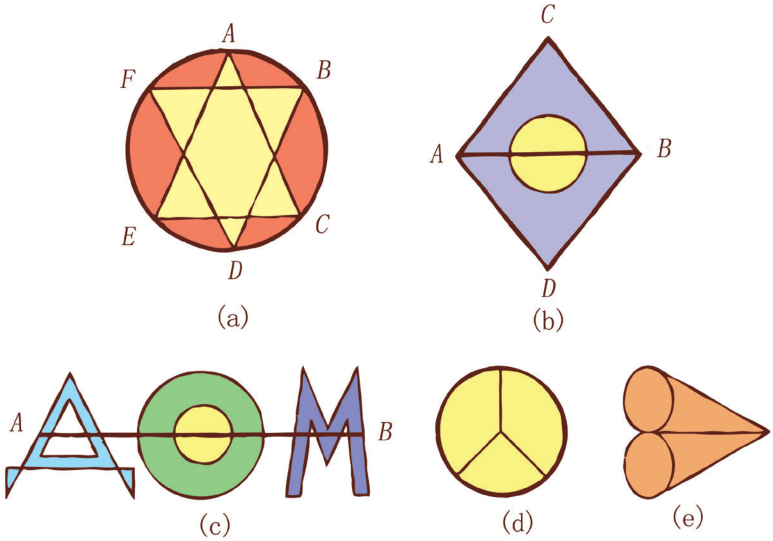


图1｜请试着将图中每个图形一笔画出来

奇数，就称它为奇交点。在图（a）中，所有的交点都是偶交点，图（b）中，有两个奇交点，即 A、B 两点，在图（c）中横穿图形的线段两端是奇交点，而在图形（d）和（e）中都有四个奇交点。

先来看看全是偶交点的图形。例如图（a）中，我们随意取一点 S，从这一点开始描画，当经过 A 点的时候，就会描画出两条线，一条是远离这一点，一条是通向这一点。但是，因为进入该点的线条数目都是一样的，所以每一次从一个交点移到另一个交点的时候，没有被画到的线条就会少两条。画完以后，原则上是可能回到出发点 S 的。

但是，如果我们已经回到起点，没有别的出路，而图中还剩下一条线，假如它是从 B 交点引出的，而这个点已经到过了，那就说明我们需要修改路线，在到 B 点的时候需要先画漏画的线条，然后再按照原路继续画。

比如，我们本来打算这样一笔画出图形（a），如图所示，先画出 ACE 三条线，然后回到 A 点，沿着圆周 $ABCDEFA$ 画，这样便只剩下 BDF。所以我们在离开 B 点去画弧线 BC 之前，需要先画三角形 BDF，如此才能一笔画完。因此，如果图形中所有的交点都是偶交点，那么这个图形一定可以一笔完成，而且描画的起点和终点是同一个点。

接下来，让我们看看有两个奇交点

的图形是怎么形成的。像图（b）里面就有两个奇交点，即 A 和 B，这个图形我们依旧可以一笔画出。只要从一个奇交点出发，然后经过某条线后到达另一个奇交点，比如沿着 ACB 从 A 点画到 B 点，描过这些线后，每个奇交点的地方都少了一条线，那么此时相当于奇交点变成了偶交点，继续进行的工作便和图中交点都是偶交点的是完全一样的做法了——这样的图形很容易一笔画出。

这里还要补充一点，从一个奇交点到另一个奇交点要选择合适的轨迹，不能形成和原有图形完全断开的情况。比如图中的（b）图，如果你沿着 AB 线到达 B 点时，这样圆周和其他部分就断绝了，因此也无法一笔完成。

在有两个奇交点的图形中，描画的起点和终点将不会重合，成功的描法就是从一个奇交点开始，另一个奇交点终止。因此，如果图形中包含四个奇交点，如（d）图和（e）图，这样的图形无法一笔画出，需要两笔。

了解到这些以后，你马上就能判

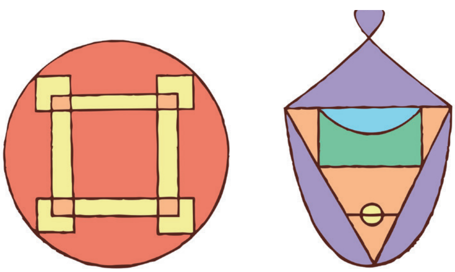


图2 | 请将两幅图的线条各用一笔画出

奇趣数字

吉祥神秘的“百零八”

我国古代认为“九”为吉祥之数，9 的 12 倍是 108，不言而喻，108 就更是吉祥之数，是吉数的极高境界。素有“钟王”之称的永乐大钟，每次撞钟都是 108 下。杭州西湖著名的“南屏晚钟”每次撞钟也是 108 下，而撞钟和尚的念珠也是 108 颗。天津鼓楼大钟每次也是撞 108 下。

北京著名古迹天坛，其最下层栏板是 108 块；而祈年殿，每层石栏也是 108 块。在青铜峡电站的附近，远远可见一群整齐的白塔，塔群依山势自上而下，按奇数列成 12 行，总计 108 座。

佛教认为，人生有 108 种烦恼，为清除这些烦恼，规定贯珠 108 颗，念佛 108 篇，晓钟 108 声等。

我国近邻日本，除夕之夜也要撞钟 108 下，日本寺院悬挂的吊钟，其外缘镂有 108 个突出的疙瘩，据说是为了清除 108 种烦恼。

断一个图形是否能一笔画完，而且还会很清楚从哪个点开始画是正确的。那么，看看**图 2** 中的两幅图，快点试一试能否一笔画完吧！

几何学的小伎俩

练习过上面一节的题目后，你已经知道描画这类图形的秘密，而且也知道有四个奇交点的图形是无法一笔完成的。不过，你还是可以跟朋友夸个海口，说自己能描画出带有四个奇交点的图形。比如，可以保证笔不离纸且一笔便能画出两个直径的圆形。

从理论上讲，这是不可能实现的。但是，既然你已夸下海口，我就教你一个小伎俩来保证实现。

先从 *A* 点出发画一个圆，当画完 1/4 圆周 *AB* 后，把另一张纸片放在 *B* 点，然后将半圆的下半部分移到 *B* 点对面的一点 *D*。现在，将小纸片挪走，这时纸片上便只有画好的 *AB* 弧，但此时铅笔已经到达了 *D* 点，接下去画完图形就不难了。你先画出弧 *DA*，接着画弦 *AC*、弧 *CD* 和直径 *DB*，最后画弧 *BC*。

当然，你也可以选择其他的路线，从其他的点开始画。怎么样？这个小伎俩是不是会令你的朋友心服口服？

如何成为下棋的赢家

来玩一个小游戏吧！先找一张四方形的纸，再找一些形状相同且对称的小东西，用来当棋子，比如硬币、围棋棋子等，它们一定要多到能够铺满整张纸。这个游戏需要两个人玩，两人依次将棋子放到纸上某个空白点，棋子一旦放下就不能改变位置，直到没有地方再放下任

何一个棋子为止，最后一个放入棋子的人便是赢家。

那么，有没有什么方法可以保证能在游戏中获胜呢？下面我来教你一个秘诀。

第一个下棋的人应当抢占纸的中心，使这个棋子的对称中心和纸的中心是重合的。然后再放棋子时，你的棋子对应着另一个人的棋子放就好了。他放在哪里，你就放在对称的位置上。这样一来，第一个下棋的人总有地方放棋子，肯定能获得胜利。

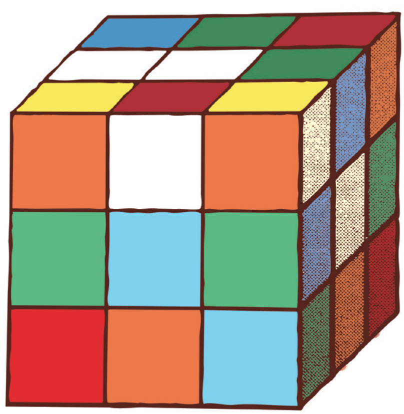
其实，这个小游戏里用到的几何原理很简单。四方形有一个对称中心，也就是它中心的一点，经过此点的直线均会被分为两段，而且会把整个图形分成两个相等的形状。因此，四方形除了中心一点，其他任何一个点，都会存在另一个与它对称的点。

由上可知，开局者如果占领了中心位置，那么另一个人不管把棋子放在哪里，在四方形里都会找到一个和这枚棋子对称的空白地方。因为棋子的位置每次都由后一个人决定，所以先下的人必然能够玩到最后。可见，谁是开局者，谁就有机会成为游戏的赢家。

木匠的奇思妙想

木匠要把一个边长 3 分米的立方体锯成 27 个 1 立方分米的小立方体（**如右图**）。显然，他只要锯 6 次便就可以做到，也就是水平面锯两次，前后面锯两次，左右面锯两次。

在锯木料时，人们常采用如下方式：把物体先锯一次，再把锯后的两部分叠合起来，锯第二次。正因如此，



木匠能用少于6次的锯数锯成这个类似魔方的木块吗？

木匠突发奇想：如何把锯下的木头巧妙地叠放在一起，使得既能减少锯的次数（只锯 5 次或者更少），又能达到相同的目的呢？想一想，木匠的奇思妙想能否实现？

仔细观察图中中心部分的小立方体，它与其他 26 个立方体有所不同。最终被锯成的 27 个小方块，只有最中央的这个小方块有 6 个截面，并且它没有一个面是已有的，均需要锯割才能形成，再加上锯一次是不可能给同一个小方块留下两个或两个以上的截面。因此，中央小方块一定要被锯 6 次。如果是 4×4×4、5×5×5 和 6×6×6 的立方体，分别需要至少锯六、九、九次才能达到目的——由此可知，木匠的奇思妙想是不可能实现的。